



저작자표시-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

경제학 석사학위논문

합리적 부주의와 금융시장 간 전이효과

2013년 2월

서울대학교 대학원
경제학부
최정훈

합리적 부주의와 금융시장 간 전이효과

지도교수 윤택

이 논문을 경제학 석사 학위논문으로 제출함
2012년 11월

서울대학교 대학원
경제학부
최정훈

최정훈의 석사 학위논문을 인준함
2012년 12월

위원장	김재영	(인)
부위원장	윤택	(인)
위원	김소영	(인)

국 문 초 록

본 논문은 금융 위기 기간동안 서로 다른 금융시장 사이의 변동성 충격 전이(transmission of volatility shocks)를 설명하는 하나의 메카니즘(mechanism)으로서 합리적으로 부주의한(rationally inattentive) 투자자의 포트폴리오(portfolio) 선택(choice)을 다룬 Mondria (2010)의 모형을 다루었다. 즉, 모형을 분석하고 수치 해(numerical solution)를 계산함으로써 변동성 충격의 전이 메카니즘을 드러내며, 모형의 결과를 자료에 적용해 봄으로써 모형을 평가하는데 그 목적이 있다.

주요어 : 금융위기, 변동성 충격의 전이, 합리적 부주의

학번 : 2011-20196

목 차

I.	서론	1
1.1	연구 동기	1
1.2	선행연구 분석	3
1.2.1	Frank (2007)	3
1.2.2	Admati (1985)	6
1.2.3	Mondria (2010)	9
1.3	논문의 구성	15
II.	본론	17
2.1	수치 해에 의거한 모형의 함의	17
2.2	금융 자료에 의거한 모형의 평가	27
2.2.1	자료 설명	27
2.2.2	결과와 평가	32
III.	결론	48
	부 록	50
	참고 문헌	76
	Abstract	78

그림 목 차

그림 1.	투자자의 최적 주의할당(c_2^*)	19
그림 2.	σ_{r2} 과 σ_{z2} 변화에 대한 c_2^* 의 변화	20
그림 3.	σ_{r2} 과 σ_{z2} 변화에 대한 c_1^* 의 변화	21
그림 4.	σ_{r2} 과 σ_{z2} 증가에 따른 $Var(\tilde{r}_1 \tilde{Y}_i, \tilde{Z})$ 증가	22
그림 5.	주의 재할당에 의한 자산 1의 가격 하락	23
그림 6.	자산 2의 불확실성 증가에 따른 자산 2의 가격 변화	24
그림 7.	자산 1의 순공급 조건부 가격 변화	25
그림 8.	자산 2의 순공급 조건부 가격 변화	26
그림 9.	OIS 수익률의 추이	28
그림 10.	3개월 만기 미 재무성 채권 수익률의 추이	28
그림 11.	S&P 500 수익률의 추이	29
그림 12.	3개월 만기 자산유동화 기업어음 수익률의 추이	29
그림 13.	미 재무성 채권 순공급의 추이	30
그림 14.	S&P 500 순공급의 추이	31
그림 15.	자산유동화 기업어음 순공급의 추이	31
그림 16.	$c_{ABCP,t}^*$ 와 $c_{T,t}^*$ 의 분기별 변화	34
그림 17.	$c_{ABCP,t}^*$ 와 $c_{S,t}^*$ 의 분기별 변화	34
그림 18.	$E[P_{ABCP,t}]$ 와 $E[P_{Tbill,t}]$ 의 분기별 변화	35
그림 19.	$E[P_{ABCP,t}]$ 와 $E[P_{Tbill,t}]$ 의 분기별 변화	36
그림 20.	ABCP와 미 재무성 채권 수익률의 분기별 변화	36
그림 21.	ABCP와 S&P 500 지수 수익률의 분기별 변화	37
그림 22.	모형의 결과와 실제 ABCP 수익률 변화 비교	37
그림 23.	모형의 결과와 실제 미 재무성 채권 수익률 비교	38
그림 24.	모형의 결과와 실제 ABCP 수익률 비교	38
그림 25.	모형의 결과와 실제 S&P 500 지수 수익률 비교	39
그림 26.	$c_{ABCP,t}^*$ 와 $c_{T,t}^*$ 의 분기별 변화	41

그림 27.	$c_{ABCP,t}^*$ 와 $c_{S,t}^*$ 의 분기별 변화	41
그림 28.	ABCP와 미 재무성 채권 수익률의 분기별 변화 . . .	42
그림 29.	ABCP와 S&P 500 지수 수익률의 분기별 변화 . . .	42
그림 30.	ABCP와 미 재무성 채권 수익률의 분기별 변화 . . .	43
그림 31.	ABCP와 S&P 500 지수 수익률의 분기별 변화 . . .	43
그림 32.	모형의 결과와 실제 ABCP 수익률 변화 비교	44
그림 33.	모형의 결과와 실제 미 재무성 채권 수익률 비교 . .	44
그림 34.	모형의 결과와 실제 ABCP 수익률 비교	45
그림 35.	모형의 결과와 실제 S&P 500 지수 수익률 비교 . . .	45

표 목 차

표 1.	모형 실험에 사용된 파라미터값	18
표 2.	자료를 모형에 적용하는데 사용된 파라미터값	33
표 3.	자료를 모형에 적용하는데 사용된 파라미터값	40

제 1 장

서론

본 논문의 서론은 크게 세 부분으로 나누어져 있는데, 첫 번째 장에서는 연구 동기로서 최근 금융위기 동안의 금융시장 내 충격의 전이를 설명한다. 두 번째 장에서는 선행 연구로서 같은 기간 동안 서로 다른 금융시장 유동성 충격의 전이와 확산에 관한 실증 연구로서 Frank (2007)를 설명한다. 그리고 Admati (1985)의 이론 연구를 설명하고, 이를 바탕으로 변동성 충격의 전이를 설명하는 하나의 이론 모형으로서 Mondria (2010)의 모형을 설명한다. 마지막으로 세 번째 장에서는 본 논문의 구성을 설명하였다.

1.1 연구 동기

2007년 7월 발생한 미국발 서브프라임 모기지 충격(Sub-prime Mortgage Crisis)은 미국 내 다양한 금융 자산들과 관련된 금융시장들로 급속히 퍼져 나갔으며, 이러한 충격은 다른 나라로까지 이어져 부정적인 영향을 끼쳤다.

최초 서브프라임 사태는 유동성(liquidity)의 문제라기 보다는 모기지 상품에 대한 신용(credit)의 문제였으나, 자산유동화 기업어음(Asset-Backed Commercial Paper)과 같이 모기지 상품을 기반으로 하는 금융 자산들이 모기지 상품에 노출되면서 이들 자산을 발행하여 자금을 공급하던 금융 기관으로 충격이 확산 되었다. 또한 은행들은 자신들이 유동성을 공급해주거나 자산을 보유하는 형태로 지원했던 금융기관들을 구제하는 노력을 시작했으나, 결과적으로 이것은 은행들의 대차

대조표 상 손실로 이어졌으며, 은행 간 시장의 대출도 급감하였다.

서브프라임 모기지와 연관된 금융위기가 가속화됨에 따라 투자자들은 자산유동화 기업어음과 같은 금융 상품의 채무 연장(roll over)을 꺼리게 되었으며, 점차 복잡하게 구조화된 금융 상품으로부터 이탈하였다. 이에 따라 구조화 투자를 둘러싼 유동성이 증발했으며, 시장에서의 거래 행위가 재무성 채권(U.S Treasury bond)와 같은 안전하고 고유동적인 자산으로 이동하는 안전자산 선호 현상(Flight to Quality)이 발생하였다.

이처럼 최근의 금융위기는 신용 위험의 문제에서 출발하였지만, 모기지와 연관된 금융 시장으로 이어졌으며, 금융시장에서 발생한 충격이 다시 다른 금융시장으로 전이, 확산되었다. 따라서 서로 다른 금융 시장 사이의 충격의 전이를 설명하는 메카니즘에 관한 이론적, 실증적 연구가 요구된다고 할 수 있다.

1.2 선행연구 분석

이 장에서는 변동성 충격의 전이와 관련된 선행 연구들을 살펴본다. 구체적으로 다양한 금융 시장의 유동성 지표 및 채무불이행 위험지표등을 대표하는 자료를 이용한 실증 연구로서 Frank (2007)를 설명하며, Mondria (2010)의 바탕이 되는 모형으로서 다양한 금융자산(multi-assets)에 투자하는 투자자의 투자선택과 시장 균형을 다룬 Admati (1985)의 이론 연구를 다루도록 한다. 마지막으로 Mondria (2010)의 모형과 풀이에 관하여 서술한다.

1.2.1 Frank (2007)

Frank (2007)는 최근의 금융위기 기간 동안 미국 내 존재하는 서로 다른 금융 시장 유동성의 상관관계가 크게 증가하였으며, 은행의 지불능력 문제와 관련된 지표들이 중요해졌음을 지적하고, 이 시기 동안 어떠한 메카니즘을 통하여 유동성 충격이 전파된 것인지에 대하여 의문을 제기한다. 그리고 시장유동성과 자금유동성, 그리고 채무불이행 위험(default risk) 사이의 상호작용에 대하여 실증분석을 실시하였다.

Brunnermeir와 Pedersen (2008) 등에 따르면, 시장 유동성(market liquidity)이란 금융 시장에서 이루어지는 거래 행위가 얼마나 신속하게 이루어지는지를 나타내며, 자금 유동성(funding liquidity)은 지불 능력이 있는 금융 시장의 참여자가 결제 의무를 수행하기 위하여 시장에서 자금을 조달할 수 있는 능력을 의미한다. Brunnermeir와 Pedersen (2008)은 자금유동성이 하락하면 이것은 시장유동성을 감소시키며, 이른바 '유동성 소용돌이'('liquidity spiral')에 돌입하면 상호 간에 더욱 악화시키는 관계가 있음을 이론적으로 분석하였다.

주목할 점은 시장유동성과 자금유동성의 하락을 강화시키는 이러한 관계가 금융 위기와 밀접하게 연관되어 있다는 것이다. Brunnermeir와

Pedersen (2008)은 다양한 경쟁 균형을 정의하여 비유동적인 균형에 들어섰을 때, 경제가 유동성 소용돌이에 빠지게 됨을 설명하였다. Frank (2007)의 유동성 변수간의 상관관계 분석 결과는 이러한 연구를 기반으로 하여 이루어진 것이라고 할 수 있다.

구체적으로 Frank(2008)가 2007년 서브프라임 위기 동안 금융시장 간 유동성 충격의 전이에 대한 실증연구에서 사용한 자료들은 자산유동화 기업어음(Asset-backed commercial paper) 스프레드(spread), 리보-오버나잇 인덱스 스왑(London Interbank Offered Rate-Overnight index swap) 스프레드, S&P500 변동성(Standard and Poors 500 volatility), 온-더-런(on-the-run)과 오프-더-런(off-the-run)스프레드, 그리고 신용파산스왑(Credit default swap) 스프레드이다.

우선 ABCP 스프레드는 3개월 만기 ABCP 수익률과 미 재무성 증권 수익률 사이의 차이를 나타낸다. 이때 ABCP는 자산유동화증권(asset-backed securities, 이하 ABS)의 일종으로서 ABCP 콘듀잇(conduit)에 의해 발행되는 ABS를 의미한다. 기업들은 자신들의 채무(receivable)를 은행 자문(bank-advised) 특수목적기구(special purpose vehicle, 이하 SPV)에 판매하며, SPV는 구매하는 자산과 스스로 발행하는 채무 사이에서 차익을 얻을 목적으로 ABCP를 발행하여 투자자에게 판매한다. 근본적으로 ABCP는 기초 자산으로 하는 금융 상품들에 비해 만기가 짧기 때문에 ABCP 콘듀잇(conduit)은 새로운 ABCP를 발행하여 만기를 연장(roll over)하려 하는데, 콘듀잇은 ABCP를 발행하여 조달한 자금으로 모기지 관련 자산에 투자하였다. 이에 따라 투자자들은 ABCP에 대한 채무 연장(roll over)을 꺼리게 되었으며, 안전하고 고유동적인 재무성 채권 수익률 간 스프레드가 증가하였다.

LIBOR 금리는 은행간 거래 금리이며, OIS 금리는 하루짜리 초단기 변동 금리(거래되는 연방기금금리(federal fund rate)의 가중평균)를 고정금리로 교환하는 스왑거래로서 의미한다. OIS의 경우 원금거래가

없이 변동금리와 고정금리 사이의 차이로서 이자(interest)만을 지급하므로 채무불이행 위험이 거의 없다고 할 수 있다. 따라서 LIBOR-OIS 스프레드는 은행의 채무불이행 위험(default risk)을 나타내는 지표로서 사용되며, 스프레드가 커질 수록 은행이 자금을 조달하는데(자금 유동성) 어려움이 있는 것을 나타낸다.

한편 미 재무성 채권은 발행된지 얼마나 지났느냐에 따라 신규 발행된 채권을 온더런(on-the-run), 직전까지 온더런이었던 채권을 오프더런(off-the-run)이라고 부른다. 온더런 채권이 유통이 더 잘되므로 가격이 더 비싸며, Frank (2008)에서 온더런과 오프더런 사이의 스프레드는 전반적인 시장유동성을 나타내는 지표로서 사용되었다.

이밖에 S&P 500 변동성(Standard and Poors 500 volatility)은 주식시장의 변동성을 나타내는 지표로서 사용되었는데, 이것은 미국의 대표적인 주가지수로서 금융위기 동안 S&P 500 변동성은 크게 증가하였다. 또한 CDS는 12개 금융기관¹들의 도산위기 또는 가능성에 대한 프리미엄 자료를 이용하였다.

이들 자료를 이용한 Frank (2007)의 분석 결과에 따르면, 금융위기 이전과 비교할 때 미국 서브프라임 사태가 지속되는 동안 시장유동성과 자금유동성에 관한 다섯 가지 지표들 사이에 상관관계 증가하였으며 동행화(co-movement)하는 현상이 나타났다. 이러한 결과는 금융위기 이전의 낮은 상관관계와는 대비되는 것으로서, 2007년 후반기 동안에 유동성 충격을 전달하는 새로운 통로가 생겨났음을 보여주는 것이다.

¹Morgan Stanley, Merrill Lynch, Goldmann Sachs, Lehmann Brothers, JP morgan, Deutsche bank, Bank of America, Citygroup, Barclays, Credit Suisse, UBS, 그리고 Bear Sterns

1.2.2 Admati (1985)

Admati (1985)는 Mondria (2010)의 근간이 되는 이론 모형에 관한 연구로서, 다양한 자산(multi-assets)에 투자하는 무한한 수의 투자자가 존재하는 금융시장의 균형에 관한 이론 모형을 다루었다.

모형에서 투자자는 2기간을 살며, 1기에 자산 거래를 하고, 2기에 자산으로부터 수익을 얻는다. 투자자는 초기 부로서 W_{i0} 를 보유하고 있으며, 하나의 무위험자산(riskless asset)과 n 개의 위험 자산(risky asset)에 투자하여 각각 R_f , $\tilde{R} = (\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_n)$ 의 수익을 얻는다.² 또한 자산의 가격, P 는 시장에서의 교환비율로써 작용한다.

투자자가 위험자산으로부터 얻는 수익, \tilde{R} 과, 위험자산의 공급, \tilde{Z} 은 확률변수로서 정규분포를 따르며, 각각의 평균은 \bar{R} , \bar{Z} 이며, 분산은 Σ_R , Σ_Z 이다. 또한 서로 독립(independent)으로 가정된다.

한편 i 번째 투자자는 자산으로부터 얻는 수익에 관한 신호(signal), \tilde{Y}_i 를 통하여 정보(information)를 얻는다. 이러한 신호 체계는 다음의 식을 통해 설명할 수 있다.

$$\tilde{Y}_i = C\tilde{R} + \tilde{\epsilon}_i$$

이때 $\tilde{\epsilon}_i$ 와 \tilde{R} 은 서로 독립이며, $\tilde{\epsilon}_i$ 는 정규분포를 따르며, 평균이 0, 분산은 Σ_{ϵ_i} 이다. 또한 서로 다른 투자자들 사이에 독립으로 가정된다.

한편 계수 벡터(vector)로서 C 는 $k \times n$ 행렬로서 주어진다. Admati (1985)에서는 이처럼 투자자가 얻는 신호에서 개별 위험자산 수익에 할당하는 가중치(weight)행렬 C 가 주어진 것으로 가정되나, Mondria (2010)에서는 정보처리제약(information processing constraint) 하에 투자자의 선택 변수로서 고려되는 차이가 있다.

²본 논문에서의 표기법(notation)은 Mondria (2010)의 방법을 그대로 사용하였다.

투자자 i 의 1기 문제로서 예산제약(budget constraint) 하에 기대 효용을 극대화하는 최적 자산수요(optimal asset holdings)를 구하는 문제를 설정하면 다음과 같다.

$$E[U_i] = E[-\exp(W_{1i}/\rho)] \quad \text{s.t.} \quad W_{1i} = W_{0i}\tilde{R} + X_i'(\tilde{R} - R_f P)$$

이때 ρ 는 투자자의 위험허용한도(risk tolerance parameter)를 의미한다. 선택 변수 X_i 에 대하여 1계조건을 계산한 후 최적 자산수요를 구하면 다음과 같다.

$$X_i(\tilde{Y}_i, \tilde{P}) = \rho \text{Var}(\tilde{R} | \tilde{Y}_i, \tilde{P}) E(\tilde{R} | \tilde{Y}_i, \tilde{P})$$

균형에서의 가격(equilibrium price)을 염두하고, 수익에 관한 신호를 관측한 이후 다음기 자산 수익에 관한 투자자의 기대(expectation)는 다음과 같다.

$$E[\tilde{R} | \tilde{Y}_i, \tilde{P}] = B_{0i} + B_{1i}\tilde{Y}_i + B_{2i}\tilde{P}$$

이때 균형에서의 가격은 각 다음과 같이 가정된다.

$$\tilde{P} = A_0 + A_1\tilde{R} - A_2\tilde{Z}$$

이제 시장청산조건(market clearing condition), $\int_0^1 X_i di = \tilde{Z}$ 을 이용하여 \tilde{P} 의 계수 행렬을 각각 파라미터(parameter)의 함수로 구하면, 유일한 합리적 기대균형 가격(unique rational expectations equilibrium)은 다음³과 같다.

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\rho}{R_f} (\rho \Sigma_R^{-1} + \rho C' \Pi \Sigma_Z^{-1} C' \Pi + C' \Pi C)^{-1} (\Sigma_R^{-1} \bar{R} + C' \Pi C \Sigma_Z^{-1} \bar{Z}) \\ A_1 &= \frac{1}{R_f} (\rho \Sigma_R^{-1} + \rho C' \Pi C \Sigma_Z^{-1} C' \Pi + C' \Pi C)^{-1} (C' \Pi + \rho C' \Pi C \Sigma_Z^{-1} C' \Pi C) \\ A_2 &= \frac{1}{R_f} (\rho \Sigma_R^{-1} + \rho C' \Pi C \Sigma_Z^{-1} C' \Pi + C' \Pi C)^{-1} (I + \rho C' \Pi C \Sigma_Z^{-1}) \end{aligned}$$

³Econometrica, Vol.53, No.3, p.652

이때 Π 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Pi = \int_0^1 \rho \Sigma_i^{-1} di$$

한편 주어진 가격과 수익에 관한 신호에 대한 다음기 자산 수익의 변동성에 관한 투자자의 믿음(belief)은 다음⁴과 같이 구할 수 있다.

$$V_i = \text{Var}(\tilde{R} | \tilde{Y}_i, \tilde{P}) = (\Sigma_R^{-1} + C' \Sigma_i^{-1} C + C' \Pi C \Sigma_Z^{-1} C' \Pi C)^{-1}$$

이와 같이 균형 가격과 초과 수익(excess return)에 대한 변동성을 구하는 것과 동일한 과정이 Mondria (2010)의 모형에서 투자자 i 의 1기 문제를 풀고, 균형 가격을 구하는 데 이용된다. 즉, Mondria (2010)의 모형은 위와 같은 Admati(1985)의 모형을 근간으로 이루어진 것으로서 n 개가 아닌 2개의 위험 자산에 투자하는 투자자의 포트폴리오 구성을 다루었으며, 투자자의 정보처리제약(information processing constraint) 하에 자산 수익에 관한 신호에 주의할당(attention allocation) 가중치(weight)를 선택하는 문제가 추가된 것이다. 이것은 Mondria (2010)에서 3기간을 사는 투자자의 1기 문제로서 고려되며, 본론에서 구체적으로 설명하도록 한다.

⁴Econometrica, Vol.53, No.3, p.652

1.2.3 Mondria (2010)

Mondria (2010)의 모형은 위험자산으로 포트폴리오를 구성하는 합리적으로 부주의한(rationally inattentive) 투자자를 가정하여 투자자가 자산에 대하여 할당하는 주의(attention)를 모형화 한 것이다. 이때 합리적으로 부주의한 투자자는 위험자산의 수익에 대한 정보를 처리하는데 제약이 있으며, 따라서 자신의 정보처리능력(information processing capacity) 하에 수익에 관하여 얻는 신호(private signal)에 대한 주의를 할당한다. Mondria (2010)의 모형은 자산가격의 동행화(comovement of asset prices)와 더불어 한 자산에 대하여 발생한 변동성 충격이 다른 자산의 가격을 변화시키는 변동성 충격의 전이(transmission of volatility shocks to asset prices)현상을 설명한다.

Mondria (2010)의 모형에서 투자자는 초기부(W_0)를 보유하고 있으며, 정보를 처리하는 능력에 한계가 있다. 이때 투자자의 정보처리능력은 κ 로 나타낸다. 투자자는 하나의 안전자산(risk-free asset)과 두개의 위험자산(risky assets)에 투자하며 각각 R_f 와 \tilde{R} 로 나타낸다.

$$\tilde{R} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)'$$

$$\tilde{r}_1 \sim N(\bar{r}_1, \sigma_{r_1}^2) \quad \tilde{r}_2 \sim N(\bar{r}_2, \sigma_{r_2}^2)$$

$$\bar{R} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2)' : \tilde{R} \text{의 평균 벡터}$$

$$\Sigma_R = \begin{pmatrix} \sigma_{r_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{r_2}^2 \end{pmatrix} : \tilde{R} \text{의 대각 공분산 행렬}$$

한편 \tilde{Z} 는 위험자산에 대한 순공급(net supply)벡터로서 다음과 같이 정의되는데, 이때 \tilde{Z} 는 \tilde{R} 와 독립(independent)으로 가정된다.

$$\tilde{Z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)'$$

$$\tilde{z}_1 \sim N(\bar{z}_1, \sigma_{z_1}^2) \quad \tilde{z}_2 \sim N(\bar{z}_2, \sigma_{z_2}^2)$$

$\tilde{Z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)' : \tilde{Z}$ 의 평균 벡터

$$\Sigma_Z = \begin{pmatrix} \sigma_{z_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{z_2}^2 \end{pmatrix} : \tilde{Z} \text{의 대각 공분산 행렬}$$

이밖에 시장에서의 교환비율로서 $\tilde{P} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)'$ 는 위험자산의 가격벡터이다.

투자자는 자산으로부터 얻을 수 있는 이득을 극대화 하는 것이 목적인데, Mondria (2010)의 모형에서 이러한 투자자는 합리적으로 부주의한 (rationally inattentive) 것으로 가정된다. 즉, 투자자는 신호(private signal)를 통하여 자산으로부터 얻는 이득에 관한 정보를 얻으며, 이러한 정보를 통하여 이득에 관한 불확실성을 줄일 수 있다. 그러나 투자자가 이득에 관한 정보를 처리할 수 있는 능력에는 한계가 존재한다. 이는 식으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{Y}_i = C_i \tilde{R} + \tilde{\epsilon}_i \text{ where } \tilde{\epsilon}_i \sim N(0, \Sigma_i)$$

$$H(\tilde{R}) - H(\tilde{R} | \tilde{Y}_i) \leq \kappa : \text{정보처리제약식}$$

이때 C_i 는 2x2 행렬이며, $\tilde{\epsilon}_i$ 는 수익률 벡터 \tilde{R} 과 독립으로 가정되며, Σ_i 는 $\tilde{\epsilon}_i$ 의 공분산 행렬이다.

자산수익률, \tilde{R} 과 투자자가 얻는 신호, \tilde{Y}_i 가 정규분포를 따른다고 가정하면, 투자자가 직면하는 정보처리제약식은 다음⁵과 같이 쓸 수 있다.

$$\ln(|\text{Var}(\tilde{R})|) - \ln(|\text{Var}(\tilde{R} | \tilde{Y}_i)|) \leq 2\kappa \quad (1.1)$$

Mondria (2010)에서 투자자는 조건부 기대확실성등가부(expected certainty equivalent)를 극대화하며, 따라서 목적함수(objective function)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

⁵정보처리제약식의 도출은 부록 1에 적어두었다.

$$EU_i = E \left\{ -\ln E \left[\exp \left(-\frac{W'_i}{\rho} \right) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}_i \right] \right\}$$

이때 W'_i 는 투자자의 최후 부(the wealth in the last period)이며, ρ 는 일정한 위험수용력(constant risk tolerance parameter)을 나타내는 모수로서 유한한 양수로 가정된다.

한편 위의 목적함수는 다음과 같은 평균-분산 목적함수⁶와 동일하다.

$$EU_i = \frac{1}{\rho} E \left[E[W'_i \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}_i] - \frac{1}{2\rho} \text{Var}(W'_i \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}_i) \right] \quad (1.2)$$

투자자는 위의 목적함수를 다음의 예산제약⁷에 대하여 극대화한다. 이때 $\tilde{X}_i = (x_{i,1}, x_{i,2})'$ 는 투자자의 자산보유량(asset holding) 벡터를 나타내며, $\int_0^1 X_i di = \tilde{Z}$ 는 시장청산조건이다.

$$W'_i = W_{i0}R_f + X'_i(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) \quad (1.3)$$

투자자는 1기에 (1.2)의 효용함수를 (1.1)의 정보처리제약과 X_i 에 대한 합리적 기대(rational expectation) 하에 대하여 극대화함으로써 자산으로부터 얻는 수익에 관한 정보에 얼마나 주의를 할당할지, 즉 C_i 와 Σ_i 를 선택한다. 그리고 2기에는 최적의 신호, Y_i 를 관측하고, 균형에서의 가격, \tilde{P} 을 고려하여 최적 자산 수익에 관한 정보를 베이저안 업데이트(Bayesian Updating)을 통하여 통합하여 자산으로부터 얻는 수익에 관한 믿음(belief)을 형성한다. 마지막으로 3기에는 자산 수익에 대한 주어진 향후 분산 하에, 투자자는 (1.3)의 예산제약에 대하여 기대효용을 극대화함으로써 최적자산보유량, X_i 를 결정한다.

모형의 풀이는 역추적(backward induction)을 이용하는데, 우선 임의의 주의 할당(attention allocation)에 대하여 각 투자자는 최적의 자산 보

⁶평균-분산 목적함수의 도출과정은 부록2에 적어두었다.

⁷예산제약식의 도출은 부록3에 적어두었다.

유량(asset holding)을 결정한다. 그리고 이처럼 주어진 최적의 위험자산수요(optimal risky asset demand)는 각 자산에 대하여 투자자가 할당하는 주의할당 가중치의 함수로서, 각 투자자는 최적주의할당(optimal attention allocation)을 결정한다.

2기에 각 투자자는 주어진 신호(\tilde{Y}_i)에 대하여 최적의 위험자산수요를 선택한다. 균형 가격을 고려하여 자산으로부터 얻는 수익에 대한 신호를 관측한 후, 투자자들은 최적의 자산수요를 결정하기 위하여 자산에 대한 수익에 관한 사후 신념(posterior belief)을 형성한다.

이제 X_i 에 대한 합리적 기대(rational expectation) 하에 투자자의 2기 최적 자산보유량(optimal asset holdings)을 구하는 문제는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \max_{X_i} \quad & \frac{1}{\rho} \left(E[W'_i | \tilde{Y}_i, \tilde{P}] - \frac{1}{2\rho} \text{Var}[W'_i | \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right) \\ \text{subject to} \quad & W'_i = W_{i0}R_f + X'_i(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) \end{aligned}$$

제약식을 효용함수에 넣은 후 목적함수를 자산보유량, X_i 에 대하여 미분하여 1계조건을 구하면 아래와 같은 최적 자산 보유량이 도출된다.

$$X_i(\tilde{Y}_i, \tilde{P}) = \rho V_i^{-1} E[\tilde{R} - R_f\tilde{P} | \tilde{Y}_i, \tilde{P}]$$

$$\text{where } V_i = \text{Var}[\tilde{R} | \tilde{Y}_i, \tilde{P}] = (\Sigma_R^{-1} + \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi + C'_i \Sigma_i^{-1} C_i)^{-1}$$

위의 자산수요와 시장청산조건(market clearing condition)($\int_0^1 X_i di = \tilde{Z}$)을 이용하여 선형의 합리적기대균형가격(linear rational expectations equilibrium)을 구할 수 있다.⁸

이제 위와 같은 2기 투자자의 최적자산보유량을 고려하여, 1기 투자자의 문제, 즉, 최적 주의 할당(optimal attention allocation)을 구하도록

⁸최적자산보유량을 구하는 문제와 선형의 합리적기대균형가격을 도출하는 과정은 부록 4에서 다루었다.

한다. 1기 투자자의 목적함수는 다음⁹ 과 같다.

$$EU_i = \frac{W_{i0}R_f}{\rho} + \frac{1}{2} \left\{ Tr \left(V_i^{-1} Q - I \right) + \bar{R}^e V_i^{-1} \bar{R}^e \right\}$$

where

$$\bar{R}^e = (\rho \Sigma_R^{-1} + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi + \Pi)^{-1} \bar{Z}$$

$$Q = Var(\tilde{R} - R_f \tilde{P}) = \Sigma_R + R_f^2 A_1 \Sigma_R A_1' + R_f^2 A_2 \Sigma_Z A_2' - R_f A_1 \Sigma_R - R_f \Sigma_R A_1'$$

한편 투자자는 어떤 특정한 선형결합 형태의 신호를 얻는 것에 무관심(indifferent)하며, 두 자산에 부여하는 상대적 가중치(relative weight)에 관심이 있으므로, 자산의 수익에 할당되는 가중치 행렬 C_i 는 $C_i = (1, c_{2i})$ 의 1x2 행렬로 표준화(normalize)될 수 있다.¹⁰ 따라서 오차항의 분산, Σ_i 는 스칼라가 되며, 투자자가 얻는 신호는 $\tilde{Y}_i = \tilde{r}_1 + c_{2i} \tilde{r}_2 + \tilde{\epsilon}_i$ 의 형태로 나타낼 수 있다. 이처럼 i번째 투자자가 얻는 신호는 첫째 항의 분산, σ_{r1}^2 이 클 수록 자산 1에 대한 정보를, 두 번째 항의 분산, $c_{2i}^2 \sigma_{r2}^2$ 이 클 수록 자산 2에 관한 정보를 많이 포함하고 있다.

이제 위의 목적함수를 (1.1)의 정보처리제약에 대하여 극대화시키는 가중치로서 c_{2i} 와 오차항의 분산, Σ_i 를 결정하는 것이 1기 투자자의 문제를 푸는 것이 되며, 목적함수와 정보처리제약은 c_{2i} 에 관한 식으로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$EU_i = \Sigma_i^{-1} \left\{ ((\bar{r}_1^e)^2 + Q_{11}) + ((\bar{r}_2^e)^2 + Q_{22} c_{2i}^2 + 2(\bar{r}_1^e \bar{r}_2^e + Q_{12}) c_{2i}) \right\} + \Omega$$

$$s.t \quad \Sigma_i \leq \frac{e^{2\kappa} - 1}{\sigma_{r1}^2 + c_{2i} \sigma_{r2}^2}$$

⁹1기 투자자의 목적함수도출 과정은 부록 5에서 다루었다.

¹⁰Mondria (2010) pp.10 11)

where

$$\begin{aligned}\Omega = \frac{w_{io}R_f}{\rho} &+ \frac{1}{2} \left\{ ((\bar{r}_1^e)^2 + Q_{11}) \left(\frac{1}{\sigma_{r1}^2} + \frac{\pi_{11}}{\sigma_{r2}^2} + \frac{\pi_{12}^2}{\sigma_{z2}^2} \right) \right. \\ &+ ((\bar{r}_2^e)^2 + Q_{22}) \left(\frac{1}{\sigma_{r1}^2} + \frac{\pi_{12}^2}{\sigma_{z1}^2} + \frac{\pi_{22}^2}{\sigma_{z2}^2} \right) \\ &\left. + 2(\bar{r}_1^e \bar{r}_2^e + Q_{12}) \left(\frac{\pi_{11}\pi_{12}}{\sigma_{z1}^2} + \frac{\pi_{12}\pi_{22}}{\sigma_{z2}^2} \right) - 2 \right\}\end{aligned}$$

이때 Π 의 각 원소는 각각 $\pi_{11}, \pi_{12}, \pi_{22}$ 로, Q 행렬의 각 원소는 각각 Q_{11}, Q_{12}, Q_{22} , \bar{R}^e 의 각 원소는 \bar{r}_1^e 와 \bar{r}_2^e 로 표현하였다.

이제 정보처리제약을 목적함수에 대입하면 자산 2에 대한 가중치, c_{2i} 를 선택하는 투자자 i 의 최적화 문제를 제약 없이 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$Max_{c_{2i}} \frac{\left\{ ((\bar{r}_1^e)^2 + Q_{11}) + ((\bar{r}_2^e)^2 + Q_{22})c_{2i}^2 + 2(\bar{r}_1^e \bar{r}_2^e + Q_{12})c_{2i} \right\} (e^{2\kappa} - 1)}{2(\sigma_{r1}^2 + c_{2i}\sigma_{r2}^2)} + \Omega$$

이제 c_{2i} 에 대하여 1계조건을 구하면 c_{2i} 에 관한 2차 방정식을 얻을 수 있으며, 2차항의 계수가 0이냐에 따라 투자자의 최적 반응(Best response)¹¹을 구할 수 있다. 앞에서 정의한 \bar{R}^e 와 Q 의 모든 원소를 모두 구하여 대입하여 2차식을 만족하는 경우의 해를 구하고, 1차식을 만족하는 경우의 해를 모두 구하면 총 4가지 해가 가능하다.¹² 최종적으로 1기 투자자 i 의 문제를 풀면 결과¹³로써 유일한 선형이면서 대칭인 합리적 기대균형(unique linear symmetric rational expectations equilibrium)이 존재하는 필요충분 조건을 얻을 수 있다.

$$\bar{r}_1^{e+} \bar{r}_2^{e+} + Q_{12}^+ \geq 0 \quad (1.4)$$

¹¹Mondria (2010) pp.24

¹²Mondria (2010) pp.24 27

¹³Mondria (2010) p.11, Proposition 2

이때 대칭 균형이란, 모형의 모든 투자자가 자산 2에 대하여 동일한 주의(attention)를 할당하는, 즉 $c_{2i} = c_2$ 의 균형을 의미하며, 투자자가 얻는 신호는 두 자산으로부터 얻는 수익률의 선형결합으로 이루어져 있으므로, 선형의 균형을 만족한다. 그리고 이러한 조건 하에서 자산 2에 대하여 투자자가 할당하는 최적의 주의 할당(attention allocation)가중치(weight)는 다음과 같다.

$$c_2^* = \frac{(\sigma_{r_2}^2 \sigma_{z_2}^2 + \sigma_{r_2}^2 \bar{z}_2^2 - \sigma_{r_1}^2 \sigma_{z_1}^2 - \sigma_{r_1}^2 \bar{z}_1^2) \sqrt{(\sigma_{r_2}^2 \sigma_{z_2}^2 + \sigma_{r_2}^2 \bar{z}_2^2 - \sigma_{r_1}^2 \sigma_{z_1}^2 - \sigma_{r_1}^2 \bar{z}_1^2)^2 + 4\sigma_{r_1}^2 \sigma_{r_2}^2 \bar{z}_1^2 \bar{z}_2}}{2\sigma_{r_2}^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2} \quad (1.5)$$

그리고 (1.5)를 정보처리제약에 대입하면 오차항의 분산을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Sigma^* = \frac{\sigma_{r_1}^2 + c_2^{*2} \sigma_{r_2}^2}{(e^{2\kappa} - 1)} \quad (1.6)$$

(1.4)의 조건에 의하여 두 위험 자산의 초과 수익의 공분산(Q_{12})은 과도한 음의 값을 가질 수 없으며, (1.5)를 통하여 자산 2에 대한 최적 주의 할당정도는 투자자의 정보처리제약, κ 와 위험허용한도, ρ 와 독립적임을 알 수 있다.

또한 Mondria (2010) 모형의 특징은 '균형에서 투자자가 두 위험 자산 중 어느 하나에 자신의 모든 주의를 할당할 수 없다'¹⁴는 것이다. 투자자가 어느 한 자산에 모든 관심을 할당하는 경우, 즉 주의할당 벡터 C 가 $C = (1, 0)$ 또는 $C = (1, \infty)$ 인 해는 존재하지 않는다. 따라서 Mondria (2010)의 모형은 투자자의 다각적인(diversified) 포트폴리오 구성을 가능하게 한다.

1.3 논문의 구성

본 논문은 서론, 본론, 결론으로 구성되어 있다. 본론의 첫 번째 장에서는 변동성 충격의 전이 메카니즘을 설명하는 하나의 이론으로서

¹⁴Mondria (2010) p.12, Proposition 3

Mondria (2010) 모형의 수치해를 계산하여 모형의 함의를 드러내도록 한다. 그리고 본론의 두 번째 장에서는 자산유동화 기업어음(Asset-Backed Commercial Paper), 미 재무성 채권(U.S Treasury Bill), 그리고 S& P 500 지수¹⁵ 자료를 모형에 적용한 결과를 설명하고, 이를 통해 각 자산의 수익률을 예측해 봄으로써 모형을 평가하였다. 마지막으로 결론에서는 본 논문의 한계점 및 향후 연구 과제를 설명하고, 결론을 요약하였다.

¹⁵Standard and Poors 500

제 2 장

본론

본론은 크게 두 개의 장으로 이루어져있다. 첫 번째 장은 Mondria (2010) 모형의 수치 해(numerical solution)을 구하여 이론적 결과가 합의 하고 있는 변동성 충격의 전이 조건을 드러낸다. 그리고 두 번째 장에서는 자산유동화 기업어음과 미 재무성 채권, 그리고 S&P 500지수의 수익, 순공급, 가격 자료를 모형에 적용하여 모형을 평가해보도록 한다.

2.1 수치 해에 의거한 모형의 합의

이 절에서는 Mondria (2010)모형이 주는 합의로서 자산간 변동성 충격의 전이(transmission of volatility shocks)와 자산 가격의 동행화(co-movement of asset prices)를 설명하였다. 한 자산에 관한 불확실성의 증가로서, 변동성이 증가하면, 투자자는 해당 자산에 대한 주의 할당(attention allocation)을 증가시키며, 따라서 다른 자산에 대하여 할당되는 주의를 감소할 수 있다. 투자자가 얻는 신호(signal)와 자산의 가격이 실현 된 후에 다음기에는 해당 자산의 변동성(사후 변동성(posterior variance))이 투자자의 주의 재할당(attention reallocation)을 통하여 증가한다. 결국 이는 궁극적으로 다른 자산의 가격 하락을 유발할 수 있다. 또한 이러한 자산 가격의 변화는 두 자산 사이에서 동일한 방향으로 일어난다.

이러한 합의를 실험하는데는 매틀랩(MATLAB) 프로그램을 이용하였

으며¹, 모형을 실험 하는데 사용된 파라미터의 값들은 Mondria (2010)에서 사용된 값들로서, 아래의 표 1과 같다.

표 1: 모형 실험에 사용된 파라미터값

	파라미터 설명	파라미터 값
σ_{r1}	자산 1의 표준편차	0.15
σ_{r2}	자산 2의 표준편차	0.15
σ_{z1}	자산 1의 순공급의 표준편차	10
σ_{z2}	자산 2의 순공급의 표준편차	10
\bar{r}_1	자산 1의 기대 수익	1
\bar{r}_2	자산 2의 기대 수익	1
\bar{z}_1	자산 1의 기대 순공급	100
\bar{z}_2	자산 2의 기대 순공급	100
ρ	위험허용한도	2
κ	투자자의 정보처리능력	0.4
R_f	무위험자산의 수익	1.02

투자자는 $\tilde{Y}_i = \tilde{r}_1 + c_2^* \tilde{r}_2 + \tilde{\epsilon}_i$ 의 형태로 신호를 얻으며, 첫째 항의 분산, σ_{r1}^2 이 클 수록 자산 1에 대한 정보를, 두 번째 항의 분산, $c_{2i}^2 \sigma_{r2}^2$ 이 클 수록 자산 2에 관한 정보를 많이 포함하고 있다. 그러므로 자산 2에 대하여 자산 1에 대하여 할당되는 상대적 주의(relative attention)는 $\sigma_{r1}^2 / c_2^{2*} \sigma_{r2}^2$ 라 할 수 있다.

¹모형 실험에 사용한 매틀랩 프로그램의 코드는 부록 8에 첨부하였다.

한 자산 시장에 예상하지 못했던 충격이 발생하면, 해당 자산에 대한 불확실성은 증가하게 되는데, Mondria (2010)의 모형의 (1.4)를 만족하는 선형대칭균형(linear symmetric equilibrium) 하에서 j 번째($j=1,2$) 자산의 수익과 순공급의 분산으로서 σ_{rj}^2 과 σ_{zj} 가 증가할 수록 j 번째 자산에 할당되는 주의를 증가한다.² 우선 자산 2에 대한 투자자의 최적 주의할당(c_2^*)을 자산 2의 수익과 순공급의 표준편차로서 σ_{r2} 와 σ_{z2} 에 대하여 임의로 범위를 설정한 후 나타내면 그림 1과 같다.

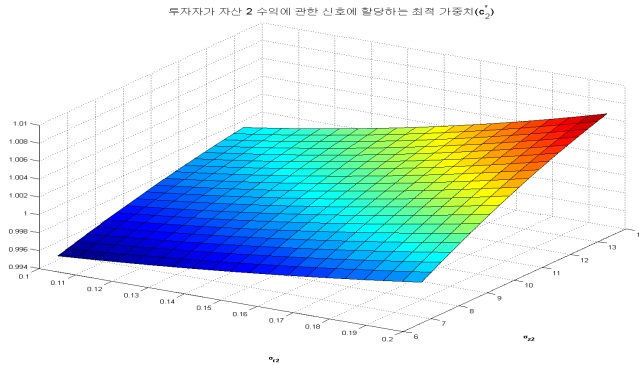


그림 1: 투자자의 최적 주의할당(c_2^*)

그리고 Mondria (2010)에서 사용된 파라미터 값($\sigma_{r2} = 0.15$, $\sigma_{z2} = 10$)에 대하여 최적 가중치를 나타내면, 그림 2를 얻을 수 있다.

그림 2에서 드러나는 것과 같이 자산 2의 수익과 순공급의 변동성이 증가할 수록 투자자가 자산 2에 대한 신호에 할당하는 가중치가 증가하는 것을 확인할 수 있다. 이것은 자산 2에 관하여 불확실성이 증가하는 경우, 투자자가 자산 2에 관하여 더 많은 정보를 처리하고자 하는 것을 나타내며, 즉 자산 2에 대하여 더 많은 주의를 할당(attention allocation)하는 것이라 할 수 있다.

Mondria (2010)에 따르면 자산 2에 관한 불확실성 증가에 대하여 투

²Mondria (2010) p.15, Proposition 6

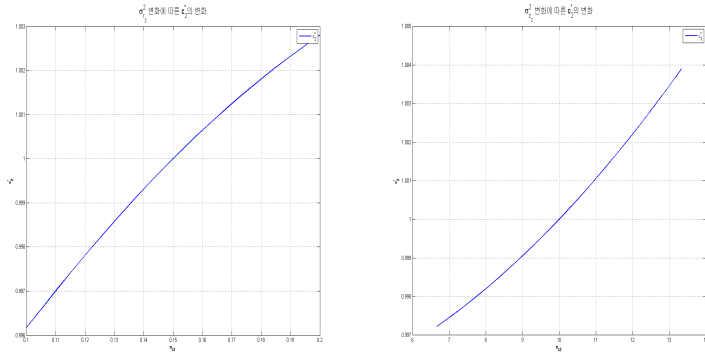


그림 2: σ_{r2} 과 σ_{z2} 변화에 대한 c_2^* 의 변화

자자가 할당하는 대응(response)은 직접효과(direct effect)와 간접효과(indirect effect)로 구분된다. 우선 직접효과란 주어진 자산 2에 대한 투자자의 최적 가중치, c_2^* 하에 자산 2에 관한 불확실성, $c_2^* \sigma_{r2}^2$ 이 증가함에 따라 자산 2에 관하여 주의를 할당하여 정보를 얻는 것을 말한다. 한편 간접효과는 자산 2의 사전분산(prior variance), σ_{z2}^2 가 증가함에 따라, 투자자가 자산 2에 대하여 부여하는 가중치, c_2 가 증가하며, 이것이 자산 2에 대하여 더 많은 주의를 할당하도록 한다는 것이다.

한편 자산 1에 부여하는 상대적인 가중치는 $\sigma_{r1}^2 / c_2^* \sigma_{r2}^2$ 를 계산하여 구할 수 있으며, 그림 2에서 나타나는 것과 같이, 자산 2의 수익과 순공급의 변동성이 증가함에 따라 자산 2에 대한 투자자의 주의를 증가하면서, 상대적으로 자산 1에 대한 투자자의 주의를 감소하며, 그림 3은 이처럼 감소하는 자산 1에 대한 가중치를 드러낸다.

그림 3에서 드러나는 것과 같이 자산 2에 대하여 부여된 높은 가중치는 자산 1에 관하여 투자자가 부여하는 가중치를 감소시킨다. 즉, 자산 1에 대하여 할당되는 주의를 감소하는 것이다. Mondria (2010)에 따르면 이처럼 감소한 자산 1에 대한 주의 할당은 자산 1의 사후 불확실

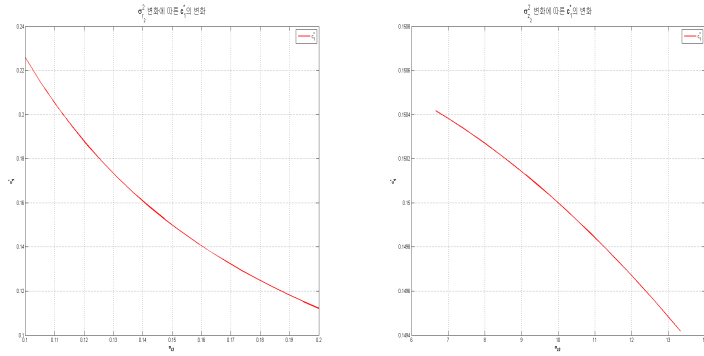


그림 3: σ_{r2} 과 σ_{z2} 변화에 대한 c_1^* 의 변화

성(posterior uncertainty)을 증가시킨다.³ 즉, 투자자에게 주어진 신호가 두 자산의 가격 하에 투자자는 각 자산의 변동성을 업데이트 하는데 (Bayesian Updating), 이처럼 자산 1에 대하여 업데이트된 분산으로서, $Var(\tilde{r}_1 | \tilde{Y}_i, \tilde{P})$ 이 증가하는 것이다. 자산 1의 사후 분산은 다음의 식을 이용하여 구할 수 있으며, 그림 4는 $Var(\tilde{r}_1)$ 의 (1,1)에 위치한 원소 구하여 그림으로 나타낸 것이다.

$$Var(\tilde{R} | \tilde{Y}_i, \tilde{P}) = (\Sigma_R^{-1} + \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi + C_i' \Sigma_i^{-1} C_i)^{-1}$$

그림 4의 왼쪽 그림은 자산 2 수익의 변동성 증가에 따라 투자자가 자산 2에 대하여 높은 주의를 할당하게 되고, 이에 따라 상대적으로 자산 1에 대하여 적은 관심을 할당함에 따라 자산 1의 사후 변동성이 증가하는 것을 나타낸다. 또한 오른쪽의 그림은 자산 2의 순공급의 변동성 증가에 따라 투자자가 자산 1에 대하여 상대적으로 적은 관심을 할당하여 자산 1의 사후 변동성이 증가하는 것을 의미한다.

이처럼 자산 2에 관한 불확실성 증가에 따라 자산 1의 사후 변동성의 증가는 주의 재할당(attention reallocation)을 통하여 일어난다. 이러한

³Mondria (2010 p.16, Proposition 7

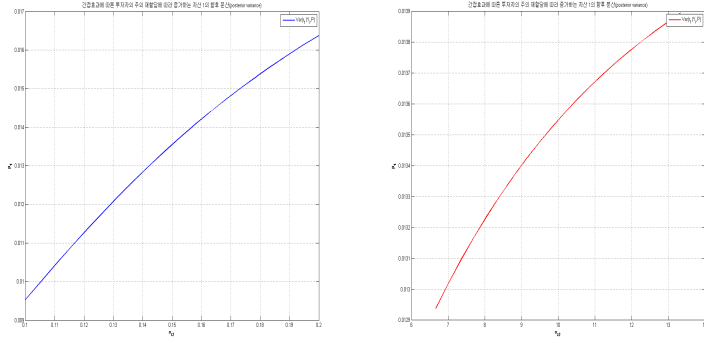


그림 4: σ_{r2} 과 σ_{z2} 증가에 따른 $Var(\tilde{r}_1 | \tilde{Y}_i, \tilde{Z})$ 증가

주의 재할당이 발생하는 이유는 자산 2에 관한 불확실성의 증가로 자산 2에 대하여 높은 관심이 쏠리게 됨에 따라 상대적으로 투자자가 자산 1에 대하여 처리하는 정보를 감소시키기 때문이다.

투자자의 주의 재할당에 의한 자산 1의 사후 변동성 증가는 궁극적으로 자산 1의 가격을 떨어뜨릴 수 있다.⁴ 균형에서 자산 1의 가격은 다음의 식⁵을 통하여 구할 수 있으며, 이처럼 계산된 자산 1의 가격은 그림 5에 나타나있다.

$$E[\tilde{P}] = E[A_0 + A_1\tilde{R} - A_2\tilde{Z}]$$

where

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\rho}{R_f} (\rho \Sigma_R^{-1} + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi + \Pi)^{-1} (\Sigma_R^{-1} \bar{R} + \Pi \Sigma_Z^{-1} \bar{Z}) \\ A_1 &= \frac{1}{R_f} (\rho \Sigma_R^{-1} + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi + \Pi)^{-1} (\Pi + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi) \\ A_2 &= \frac{1}{R_f} (\rho \Sigma_R^{-1} + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi + \Pi)^{-1} (I + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1}) \end{aligned}$$

⁴Mondria (2010), p.18, Proposition 8

⁵비조건부 기대값의 도출 과정은 부록 7에 적어두었다.

$$\therefore E[\tilde{P}] = \frac{1}{R_f} (\bar{R} - (\rho \Sigma_R^{-1} + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi + \Pi)^{-1} \bar{Z})$$

그림 5의 왼쪽 그림은 자산 2 수익의 변동성 증가에 따라 자산 2에

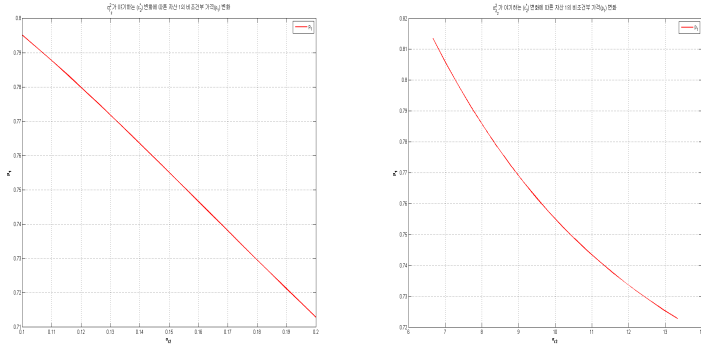


그림 5: 주의 재할당에 의한 자산 1의 가격 하락

높은 주의가 할당됨에 의하여 주의재할당이 일어나는 것을 나타내며, 오른쪽의 그림은 자산 2 공급의 변동성 증가에 따라 투자자가 자산 2에 대하여 많은 정보를 처리함에 의하여 주의재할당이 일어나는 것을 의미한다. 두 경우 모두에서 자산 1의 가격이 하락하는 것을 확인할 수 있다.

투자자의 주의 재할당이 이처럼 자산 1의 가격 하락으로 이어지는 이유는 자산 1의 리스크 프리미엄(risk premium)이 증가하기 때문으로 해석할 수 있다.⁶ 즉, 주의 재할당은 자산 1의 변동성을 증가시키며, 이러한 변동성의 증가는 자산 1에 대한 불확실성의 증가를 의미하는 것이기 때문이다.

Mondria (2010)의 모형이 주는 이러한 함의는 자산간 변동성 충격의 전이를 설명하는 하나의 메카니즘이 된다. 즉, 한 자산의 변동성에 충격이 발생하면, 해당 자산에 대한 불확실성이 증가하여 투자자는 높은

⁶Mondria (2010), p.18

주의를 할당한다. 이에따라 주의재할당의 과정을 통하여 상대적으로 관계없는 자산의 사후 불확실성이 증가하게되며, 궁극적으로 다른 자산의 가격을 감소시키게 되는 것이다.

한편 Mondria (2010)의 모형이 주는 또 하나의 함의는 자산 가격의 동행화(comovement of asset prices)이다. 자산 2에 대한 비조건부 기대 가격을 구하여 그림으로 나타내면 그림 6과 같다.

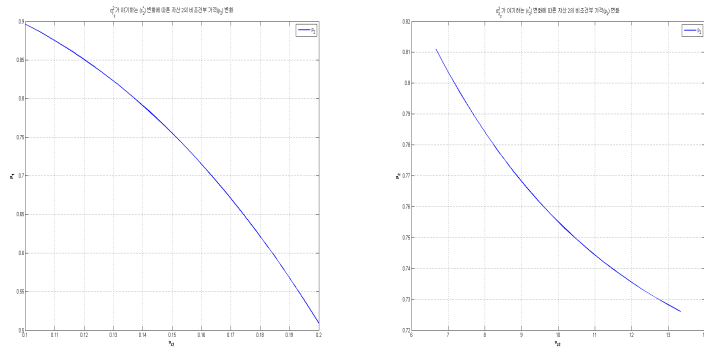


그림 6: 자산 2의 불확실성 증가에 따른 자산 2의 가격 변화

그림 6의 왼쪽 그림은 자산 2 수익의 변동성, σ_{r1}^2 변화에 따라 자산 2에 대하여 할당되는 투자자의 주의, c_2^* 가 변하는데, 이처럼 변화하는 c_2^* 에 따른 자산 2의 비조건부 기대 가격 변화를 나타내는 것이다. 반면 오른쪽의 그림은 자산 2 순공급의 변동성으로서 σ_{r2}^2 이 야기하는 c_2^* 에 대한 자산 2의 비조건부 기대 가격 변화를 나타낸다. 그림 16과 비교하면 자산 2에 대하여 할당되는 투자자의 주의 할당 증가에 대하여 두 자산의 비조건부 기대 가격이 함께 감소하는 자산 가격의 동행화⁷를 확인할 수 있다.

⁷이러한 조건부 자산가격의 동행화는 $\min\{(\rho^2 - \sigma_{r1}^2 \sigma_{r2}^2), (\rho^2 - \sigma_{r2}^2 \sigma_{r1}^2)\} \geq \sigma_{r1}^2 \sigma_{r2}^2 / \rho^2$ 하에서 성립한다.(Mondria (2010), p14, Proposition 5)

또한 Mondria (2010) 모형의 선형 대칭 균형 하에서는 자산의 순공급, \tilde{Z} 이 실현된 상황에서 두 자산의 조건부 기대 가격의 동행화 또한 설명할 수 있다.⁸ (\tilde{P}, \tilde{Z})는 정규분포를 따르므로, 자산의 순공급을 조건부로 하는 자산 가격의 분포를 구할 수 있으며, 따라서 조건부 기대값은 다음⁹ 과 같다.

$$\tilde{P} | \tilde{Z} \sim N(\bar{P} + A_2(\tilde{Z} - \bar{Z}), A_1 \Sigma_R A_1')$$

$$\therefore E[\tilde{P} | \tilde{Z}] = \bar{P} + A_2(\tilde{Z} - \bar{Z})$$

위의 결과를 이용하여 조건부 기대가격의 각 원소를 계산하여 그림으로 나타내면 그림 7, 8과 같다.

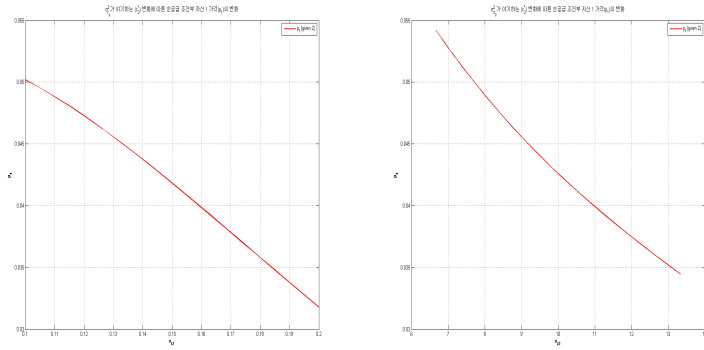


그림 7: 자산 1의 순공급 조건부 가격 변화

그림 7과 그림 8의 왼쪽 그림은 자산 2 수익의 변동성 증가에 따라 자산 2에 할당되는 주가의 증가가 유발하는 두 자산의 조건부 기대가격의 변화를 나타낸다. 그리고 오른쪽에 위치한 그림들은 자산 2 순공급의 변동성 증가가 유발하는 조건부 기대가격의 변화이다. 그림을 통하여 확인할 수 있는 것처럼 자산의 순공급이 실현된 상태에서의 두 자산의

⁸Mondria (2010), p.14, Proposition 4

⁹조건부 기대값의 도출 과정은 부록 7에 적어두었다.

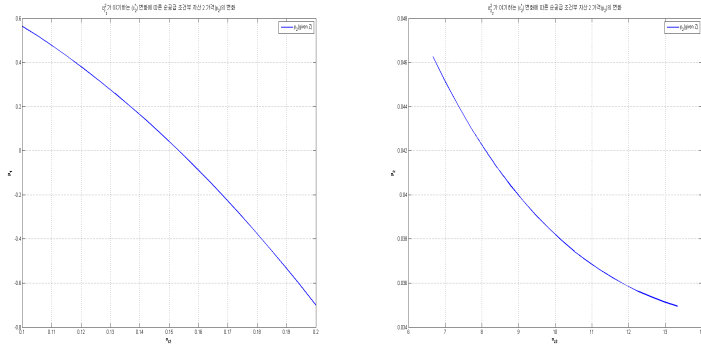


그림 8: 자산 2의 순공급 조건부 가격 변화

가격 역시 동일한 방향으로 움직이는 가격 동행화가 일어난다.

이처럼 Mondria (2010)의 모형은 서로 다른 자산 간 변동성 충격의 전이 메커니즘을 설명하는 하나의 이론이라고 할 수 있다. 모형에서 3 기간을 사는 투자자는 자산의 수익에 대한 신호를 얻어 정보를 처리하며, 투자자가 처리할 수 있는 정보에는 한계가 존재한다. 이는 투자자의 정보처리제약으로 나타난다. 따라서 1기에 투자자는 이러한 제약 하에 신호에 대한 최적의 주의 할당 가중치를 설정하고, 이러한 과정에서 두 자산 가운데 어느 한 자산에는 상대적으로 투자자의 주의가 덜 할당되게 된다. 2기에는 주어진 신호와 자산의 균형가격에 대하여 투자자가 자산으로부터 얻는 수익의 불확실성에 관한 믿음을 사후적으로 정립하는데, 이 과정에서 상대적으로 적은 주의가 할당된 자산의 사후 변동성이 증가하여 해당 자산의 가격에 영향을 미친다.

2.2 금융 자료에 의거한 모형의 평가

이 장에서는 자산의 수익률 자료를 Mondrdia (2010) 모형에 적용하도록 한다. 즉, 미 재무성 채권(U.S Treasury Bill)과 S&P 500지수를 모형의 자산 1로 취급하고, 자산유동화 기업어음(Asset-Backed Commercial Paper)을 자산 2로 취급하여 변동성 충격이 전이됨에 따른 두 자산가격의 변화를 알아본 후, 이를 이용하여 두 자산의 수익률을 예측하여 보는 것이다. 1절에서는 자료에 대한 설명을 하고, 2절에서는 자료를 모형에 적용하여 얻은 결과를 설명한다. 마지막으로 이를 토대로 모형을 평가하여 보도록 한다.

2.2.1 자료 설명

모형에 적용한 자료는 2002년 1분기부터 2011년 4분기까지의 기간에 대한 분기별 자산의 수익률과 순공급이다. 수익률 자료는 무위험 자산(R_f)과 위험자산(\tilde{R})에 대한 것으로 나누어지는데, 무위험자산으로는 오버나잇인덱스 스왑(Overnight Index Swap) 수익률 자료¹⁰ (이하 OIS 금리)를 사용하였다.

OIS 금리는 하루짜리 초단기 변동 금리(거래되는 연방기금금리(federal fund rate)의 가중평균)를 고정금리로 교환하는 스왑거래를 의미한다. OIS의 경우 원금거래가 없이 변동금리와 고정금리 사이의 차이로서 이자(interest)만을 지급하므로 채무불이행 위험이 거의 없다고 할 수 있다. 그림 9는 대상 기간에 대한 OIS 금리의 추이를 드러낸다.

위험자산의 수익률 자료는 3개월 만기 미 재무성 채권¹¹, S&P 500 지수¹², 그리고 자산유동화 기업어음¹³(이하 ABCP)을 사용하였다. 수익

¹⁰자료출처 : Bloomberg

¹¹자료출처 : Bloomberg

¹²자료출처 : Federal Reserve Economic Data - St.Louis

¹³자료출처 : Bloomberg

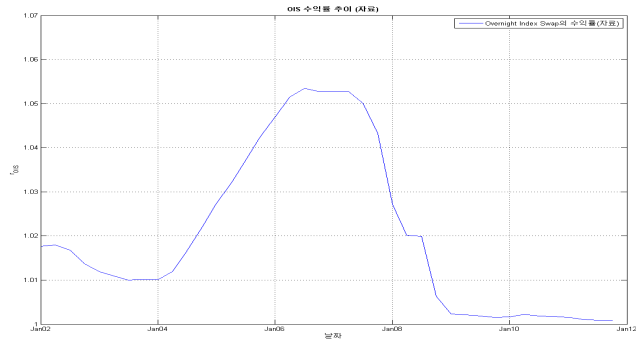


그림 9: OIS 수익률의 추이

률은 일별 자료의 분기별 평균을 구하여 분기별 자료로 전환하여 사용하였는데, S&P 500 지수의 경우에는 로그차분하여 수익률을 계산하여 사용하였다. 그림 10, 11, 12는 각 자산의 수익률 추이를 나타낸다.

한편 순공급 자료의 경우 각 자산에 해당하는 거래량(trading volume)

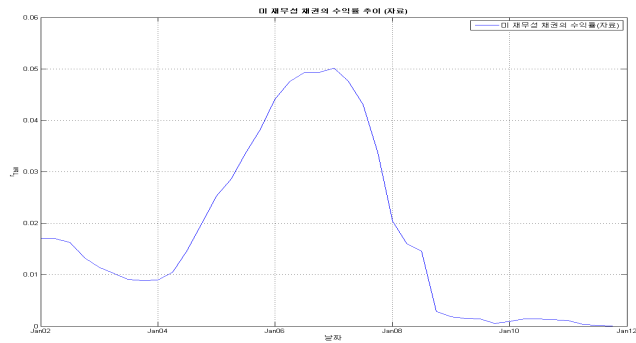


그림 10: 3개월 만기 미 재무성 채권 수익률의 추이

을 구하여 사용하는 것이 가장 바람직하나, S&P 500 지수를 제외한 자산의 경우 거래량 공시 의무가 없어 자료 획득에 한계가 존재한다.

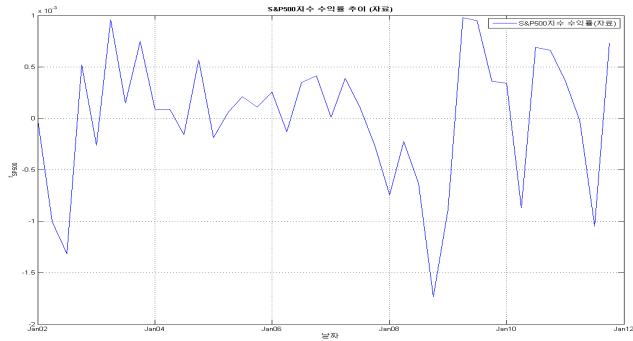


그림 11: S&P 500 수익률의 추이

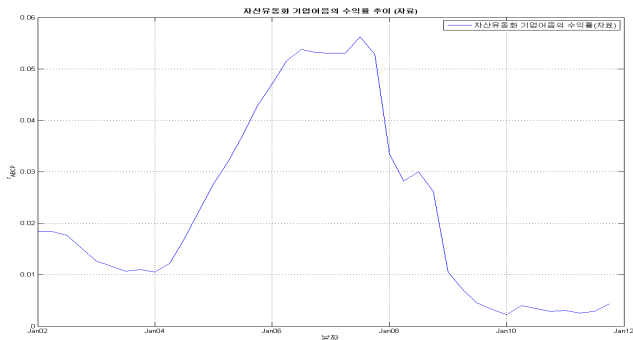


그림 12: 3개월 만기 자산유동화 기업어음 수익률의 추이

따라서 미 재무성 채권¹⁴의 경우에는 2001년 발행량(2001 Treasury Bills Outstanding)과 미국 연방준비제도이사회(Federal Reserve Board)에서 제공하는 자금순환계정(Flow of Funds Account)의 순 부채 증가분(Net Increase in Liabilities)을 혼합하여 사용하였다. 즉, 2001년 발행량에 2002년 1분기 순 부채증가분을 더하여 2002년 1분기 순공급 자료를 만든 후 계속하여 순 부채 증가분을 더하여 2011년 4분기까지 계산하

¹⁴자료출처 : Economic Report of the President (2012), U.S Flow of Funds Accounts (F.209)

였다.

ABCP¹⁵의 경우에는 2011년 4분기 발행량(Outstandings) 자료에 대하여 미 재무성 채권의 순공급 자료를 구한 것과 같은 방식으로 매 분기 순 부채 증가분을 더하여 2011년 4분기까지 계산하였다.

마지막으로 S&P 500 지수¹⁶는 거래량에 주당 순 이익(Earning Per Share)을 곱하여 달러 단위로 계산하여 다른 두 자산의 순공급 자료와 단위를 일치시켜 사용하였다.

미 재무성 채권과 ABCP 순공급 자료는 3개월 만기를 일치시켜 사용할 수 없었다. 따라서 만기 구분 없이 대상시점에 대한 자료를 사용하였다. 그리고 순공급 자료를 계산함에 있어 2001년의 발행량을 구하여 순 부채증감을 더한 이유는 전 기간 평균(\bar{Z})이 음수(-)가 나오는 경우 모형에 적용하는데 어려움이 있어 이를 해결하기 위함이다. 그림 13, 14, 15는 각 자산의 순공급 추이를 나타낸다.

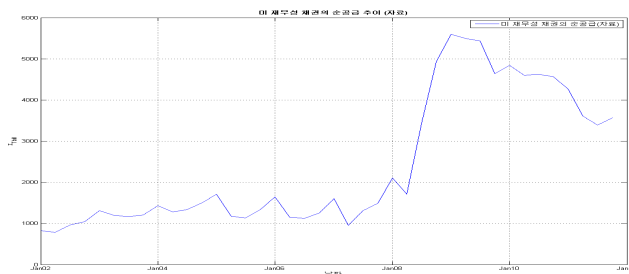


그림 13: 미 재무성 채권 순공급의 추이

¹⁵Federal Reserve Economic Data - St.Louis, U.S Flow of Funds Accounts (F.124)

¹⁶Federal Reserve Economic Data - St.Louis, S&P 500 EARNINGS AND ESTIMATE REPORT

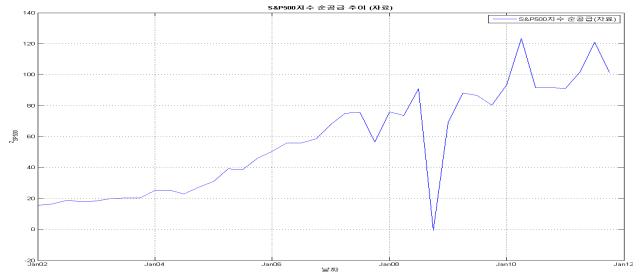


그림 14: S&P 500 순공급의 추이

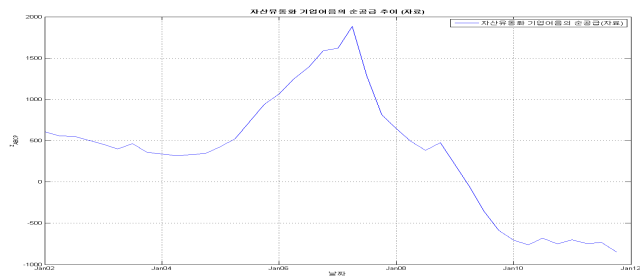


그림 15: 자산유동화 기업어음 순공급의 추이

2.2.2 결과와 평가

수익률 자료는 변동성 충격의 원인이 되는 자산과 영향을 받는 자산으로 나누어 생각할 수 있는데, 원인이 되는 자산은 ABCP 수익률이며, 영향을 받는 자산은 각각 미 재무성 채권과 S&P 500 수익률이다. 따라서 분석 결과는 영향을 받는 자산에 따라 나누어 서술하였다.

한편 자료를 모형에 적용하는 방식은 크게 두 가지로 나누어 실시하였다. 우선 위험허용한도, ρ 와 투자자의 정보처리능력, κ 를 제외한 모든 변수를 변화시켜 각 자산에 대한 투자자의 주의할당 가중치, c_1, c_2 를 계산하고, 이를 통해 두 자산 가격의 기대값을 계산하였다. 두 번째는 자료로써 사용된 두 자산 수익률의 변동성 변화가 두 자산가격과 수익률에 미치는 영향을 알아보기 위하여, 두 자산 수익률의 변동성을 제외한 모든 파라미터를 전 기간에 대하여 단일 값(single value)를 계산하여 주의할당 가중치와 가격의 기대값을 계산하였다.

이 장의 1절에서는 모든 변수를 변화시켰을 때의 결과를 서술하고, 2절에서는 수익률의 변동성 만을 변화시켰을 때의 결과를 서술하도록 한다. 마지막으로 3절에서는 결과에 의거한 모형의 평가를 서술하였다.

2.2.2.1 모든 변수를 변화시킨 경우의 결과

이 절에서는 우선 위험허용한도, ρ 와 투자자의 정보처리능력, κ 를 제외한 모든 변수가 분기별로 변화함에 따라 변하는 투자자의 주의할당 가중치와, 균형에서의 기대가격, 그리고 가격을 로그차분하여 수익률로 변환시킨 결과를 계산하고, 실제 수익률 자료와 비교하도록 한다. 이를 확인하기 위하여 사용된 파라미터 값들은 표 2에 정리되어 있다. 이때 $i = T, S$ 이며, T 는 미 재무성 채권을, S 는 S&P 500지수를 나타내며, 수익률의 단위는 %, 순공급의 단위는 10억달러 이다.

표 2: 자료를 모형에 적용하는데 사용된 파라미터값

파라미터 설명		파라미터 값
σ_{ri}	영향을 받는 자산 수익률의 표준편차	분기별 자료
σ_{rA}	원인 자산으로서 ABCP 수익률의 표준편차	분기별 자료
σ_{zi}	영향을 받는 자산의 순공급의 표준편차	분기별 자료
σ_{zA}	원인 자산으로서 ABCP의 순공급의 표준편차	분기별 자료
\bar{r}_i	영향을 받는 자산의 기대 수익률	분기별 자료
\bar{r}_A	원인 자산으로서 ABCP의 기대 수익률	분기별 자료
\bar{z}_i	영향을 받는 자산의 기대 순공급	분기별 자료
\bar{z}_A	원인 자산으로서 ABCP의 기대 순공급	분기별 자료
ρ	위험허용한도	2
κ	투자자의 정보처리능력	0.4
R_o	OIS 수익률	분기별 자료

투자자가 원인이 되는 자산으로서 ABCP에 대하여 할당하는 최적 주의 할당 가중치, $c_{ABCP,t}^*$ 와 상대적으로 영향을 받는 자산에 대한 주의할당 가중치, $c_{i,t}^*$ ($i = T, S$)는 각각 다음의 식을 통하여 계산할 수 있다.

$$c_{A,t}^* = \frac{(\sigma_{rA,t}^2 \sigma_{zA,t}^2 + \sigma_{rA,t}^2 \bar{z}_{A,t}^2 - \sigma_{r,i,t}^2 \sigma_{z,i,t}^2 - \sigma_{r,i,t}^2 \bar{z}_{i,t}^2) \sqrt{(\sigma_{rA,t}^2 \sigma_{zA,t}^2 + \sigma_{rA,t}^2 \bar{z}_{A,t}^2 - \sigma_{r,i,t}^2 \sigma_{z,i,t}^2 - \sigma_{r,i,t}^2 \bar{z}_{i,t}^2)^2 + 4\sigma_{r,i,t}^2 \sigma_{rA,t}^2 \bar{z}_{i,t}^2 \bar{z}_{A,t}^2}}{2\sigma_{rA,t}^2 \bar{z}_{i,t} \bar{z}_{A,t}}$$

$$c_{i,t}^* = \sigma_{r,i,t}^2 / c_{A,t}^{2*} \sigma_{rA}^2$$

그리고 그림 16은 영향을 받는 자산이 미 재무성 채권인 경우 두 자산에 대한 주의할당 가중치, 즉 $c_{ABCP,t}^*$ 와 $c_{T,t}^*$ 를 분기별로 계산한 결과를 나타낸다.

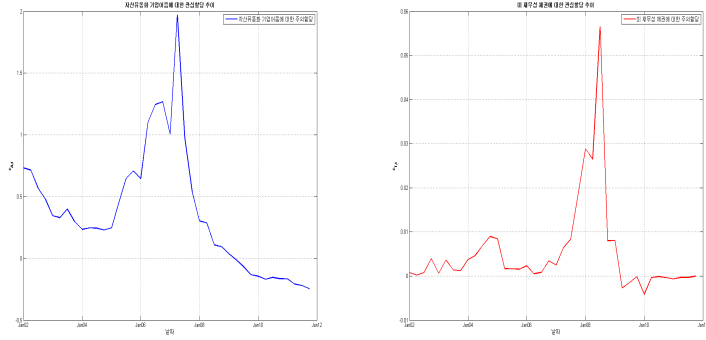


그림 16: $c_{ABCP,t}^*$ 와 $c_{T,t}^*$ 의 분기별 변화

그림 17은 마찬가지로의 방법을 통하여 영향을 받는 자산이 S&P 500 지수인 경우 각 자산에 대한 최적 주의할당 가중치, 즉 $c_{ABCP,t}^*$ 와 $c_{S,t}^*$ 를 분기별로 계산한 결과를 나타낸다.

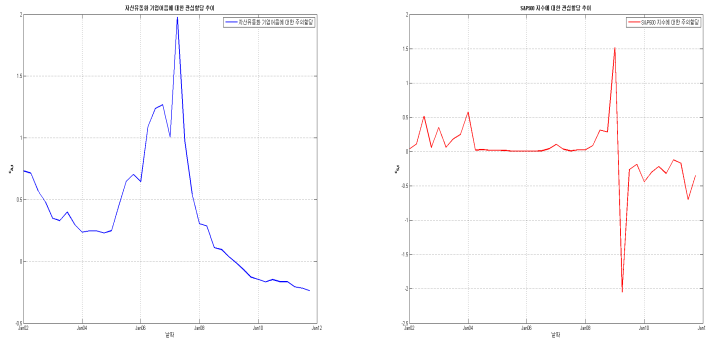


그림 17: $c_{ABCP,t}^*$ 와 $c_{S,t}^*$ 의 분기별 변화

이처럼 분기별 주의할당 가중치를 이용하여 각 자산의 분기별 가격 변화를 알 수 있으며, 이는 다음의 식을 통하여 계산할 수 있다.

$$E[\tilde{P}_t] = \frac{1}{R_{o,t}} \left[\tilde{R}_t - (\rho \Sigma_{R,t}^{-1} + \rho \Pi_t \Sigma_{Z,t}^{-1} \Pi_t + \Pi_t)^{-1} \tilde{Z}_t \right]$$

이때 $E[\tilde{P}_t]$ 는 2×1 벡터이며, 첫번째 원소가 영향을 받는 자산의 균형 가격을, 두 번째 원소가 원인이 되는 자산의 균형 가격을 의미한다. 그림 18은 영향을 받는 자산이 미 재무성 채권인 경우에 대하여 두 자산 가격의 분기별 추이를 계산한 결과를 나타낸다.

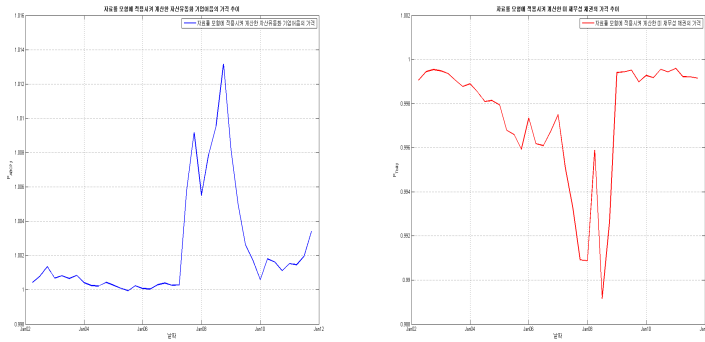


그림 18: $E[P_{ABCP,t}]$ 와 $E[P_{Tbill,t}]$ 의 분기별 변화

한편 마찬가지로의 방식을 통하여 영향을 받는 자산이 S&P 500 지수인 경우 두 자산의 분기별 균형 가격 추이는 그림 19에 나타나 있다.

그리고 위와 같이 계산한 자산 가격을 로그차분하는 방식을 통하여 ABCP의 수익률과 영향을 받는 두 자산에 대한 수익률을 계산할 수 있다. 그림 20은 영향을 받는 자산이 미 재무성 채권인 경우의 ABCP 자산의 수익률과 미 재무성 채권의 수익률을 분기별로 계산한 결과이며, 그림 21은 영향을 받는 자산이 S&P 500 지수인 경우 ABCP 자산 수익률과 S&P 500 지수 수익률의 분기별 변화를 나타낸다.

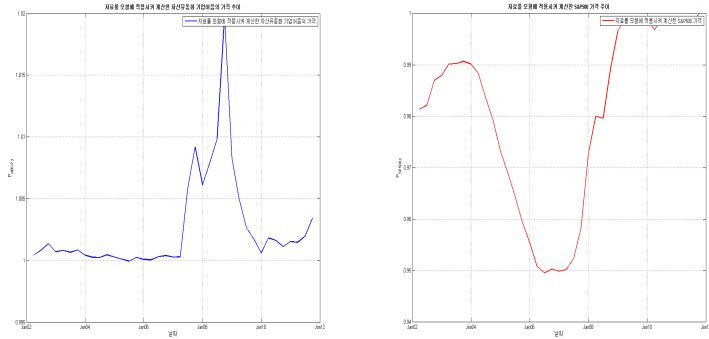


그림 19: $E[P_{ABCP,t}]$ 와 $E[P_{Tbill,t}]$ 의 분기별 변화

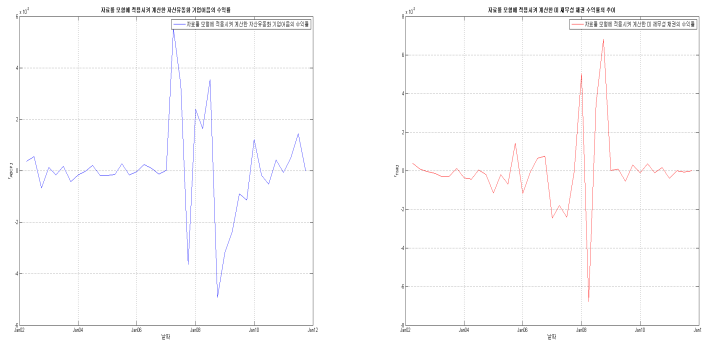


그림 20: ABCP와 미 재무성 채권 수익률의 분기별 변화

이제 위와 같이 자료를 통하여 계산한 자산의 수익률을 실제 자산 수익률과 함께 나타냄으로써 자료를 모형에 적용시켜 얻은 결과를 실제와 비교할 수 있다. 우선 그림 22는 영향을 받는 자산이 미 재무성 채권인 경우 모형을 통해 계산한 ABCP 수익률과 실제 ABCP 수익률을 비교하여 나타낸 것이며, 그림 23은 마찬가지로의 경우에 대하여 미 재무성 채권을 비교하여 나타낸 것이다.

영향을 받는 자산이 미 재무성 채권인 경우 ABCP의 수익률은 대체로

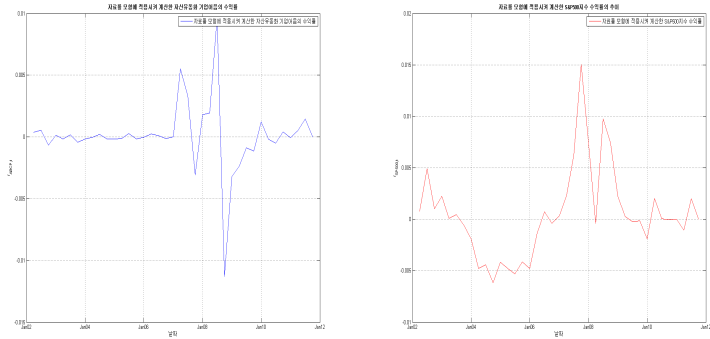


그림 21: ABCP와 S&P 500 지수 수익률의 분기별 변화

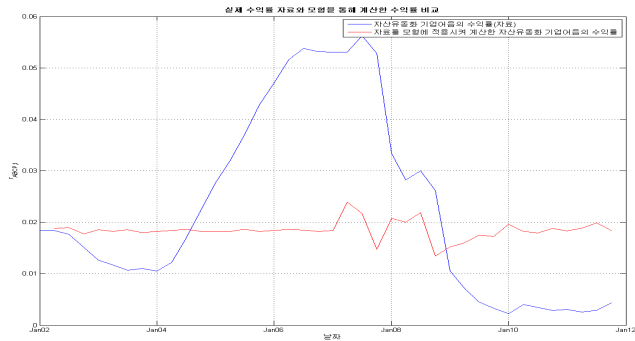


그림 22: 모형의 결과와 실제 ABCP 수익률 변화 비교

2008년 2분기 이후의 실제 자료와 비슷한 추이를 보이는 것을 알 수 있다. 하지만 2009년 1분기 이후 실제 수익률은 계속해서 하락하는 모습을 보이는 반면, 모형의 계산 결과는 상승 국면을 보이는 것을 알 수 있으며, 특히 2004년 1분기 이후 수익률의 가파른 상승폭은 모형의 결과를 통하여 설명이 되지 않는 것을 확인할 수 있다.

미 재무성 채권의 수익률 또한 2008년 2분기 이후의 가파른 하락세는 실제 자료와 동일하게 나타나지만, 곧 3분기부터 나타나는 증가세는



그림 23: 모형의 결과와 실제 미 재무성 채권 수익률 비교

실제 자료와 맞지 않는 부분이라 할 수 있다. 또한 마찬가지로 2004년 1분기 이후 수익률의 상승세는 자료를 통하여 설명되지 않는다.

한편 영향을 받는 자산이 S&P 500 지수인 경우 모형을 통하여 계산한 ABCP와 S&P 수익률과 실제 두 자산 수익률을 비교한 결과는 그림 24와 그림 25를 통하여 확인할 수 있다.



그림 24: 모형의 결과와 실제 ABCP 수익률 비교

ABCP 수익률의 경우 2008년 3분기 이후의 추세는 실제 자료와 비슷

하게 나타나는 것을 확인 할 수 있으나, 실제 수익률은 2009년 1분기 이후에도 계속해서 하락하는 반면, 모형의 결과는 상승 국면을 보이는 것은 이질적이라 할 수 있다. 한편 이 경우에도 마찬가지로 2004년 1분기 이후의 상승세는 설명할 수 없었다.

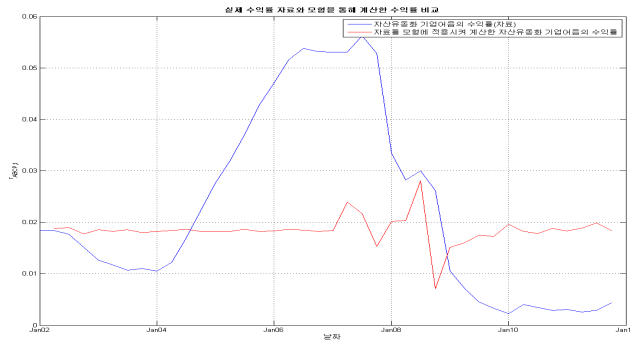


그림 25: 모형의 결과와 실제 S&P 500 지수 수익률 비교

S&P 500 지수 수익률의 경우 모형의 결과와 실제 자료 사이에 괴리가 있음을 확인할 수 있다. 2003년 4분기 시작 이후의 급격한 하락세와 2007년 4분기부터 2008년 2분기 사이의 큰 변동은 실제 자료와 맞지 않는 부분이며, 전체적으로 실제 자료와 이질적인 모습을 보였다.

2.2.2.2 수익률의 변동성만을 변화시킨 경우의 결과

이 절에서는 수익률의 변동성의 변화가 각 자산에 대한 투자자의 주의할당에 미치는 영향과 수익률에 미치는 영향을 알아보기 위하여 수익률의 변동성만을 분기별로 변화시키고 나머지 파라미터는 모두 전 기간에 대하여 구한 단일 값(single value)을 구하여 모형에 적용시킨 결과를 서술하도록 한다. 따라서 영향을 받는 자산에 따라 다른 파라미터 값을 가지며, 이 절에서 자료를 모형에 적용하기 위하여 사용된

파라미터 값들은 표 3에 정리되어있다.

표 3: 자료를 모형에 적용하는데 사용된 파라미터 값

파라미터 설명		파라미터 값
$\sigma_{rT} // \sigma_{rS}$	영향을 받는 자산 수익률의 표준편차	분기별 자료
σ_{rA}	원인 자산으로서 ABCP 수익률의 표준편차	분기별 자료
$\sigma_{zT} // \sigma_{zS}$	영향을 받는 자산의 순공급의 표준편차	1625.9 // 33.2917
σ_{zA}	원인 자산으로서 ABCP의 순공급의 표준편차	732.6138
$\bar{r}_T // \bar{r}_S$	영향을 받는 자산의 기대 수익률	1.017874 // 1.000016
\bar{r}_A	원인 자산으로서 ABCP의 기대 수익률	1.022645
$\bar{z}_T // \bar{z}_S$	영향을 받는 자산의 기대 순공급	2418.024 // 56.9771107
\bar{z}_A	원인 자산으로서 ABCP의 기대 순공급	349.6369
ρ	위험허용한도	2
κ	투자자의 정보처리능력	0.4
R_o	OIS 수익률	1.02013469

전 절에서와 같은 방식으로 원인이되는 자산으로서 ABCP에 대한 투자자의 최적 주의할당 가중치, $c_{ABCP,t}^*$ 와 상대적으로 영향을 받는 자산에 대한 가중치, $c_{i,t}^* (i = T, S)$ 는 아래의 식을 통하여 계산할 수 있다. 이때 수익률의 변동성을 제외한 다른 파라미터는 단일 값을 사용하였으므로 하첨자 t 는 제거된다.

$$c_{A,t}^* = \frac{(\sigma_{rA,t}^2 \sigma_{zA}^2 + \sigma_{rA,t}^2 \bar{z}_A^2 - \sigma_{r,i,t}^2 \sigma_{z,i}^2 - \sigma_{r,i,t}^2 \bar{z}_i^2) \sqrt{(\sigma_{rA,t}^2 \sigma_{zA}^2 + \sigma_{rA,t}^2 \bar{z}_A^2 - \sigma_{r,i,t}^2 \sigma_{z,i}^2 - \sigma_{r,i,t}^2 \bar{z}_i^2)^2 + 4\sigma_{r,i,t}^2 \sigma_{rA,t}^2 \bar{z}_i^2 \bar{z}_A^2}}{2\sigma_{rA,t}^2 \bar{z}_i \bar{z}_A}$$

$$c_{i,t}^* = \sigma_{r,i,t}^2 / c_{A,t}^* \sigma_{rA}^2$$

그림 26은 영향을 받는 자산이 미 재무성 채권인 경우 두 자산에 대한 최적 주의할당 가중치, $c_{ABCP,t}^*$ 와 $c_{T,t}^*$ 를 구하여 나타낸 것이며, 그림 27은 영향을 받는 자산이 S&P 500 지수인 경우에 대하여서도 최적 주의

할당 가중치, $c_{ABCP,t}^*$ 와 $c_{S,t}^*$ 를 구하여 나타낸 것이다.

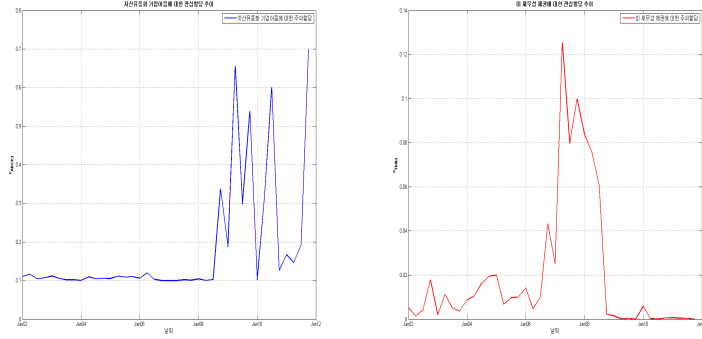


그림 26: $c_{ABCP,t}^*$ 와 $c_{T,t}^*$ 의 분기별 변화

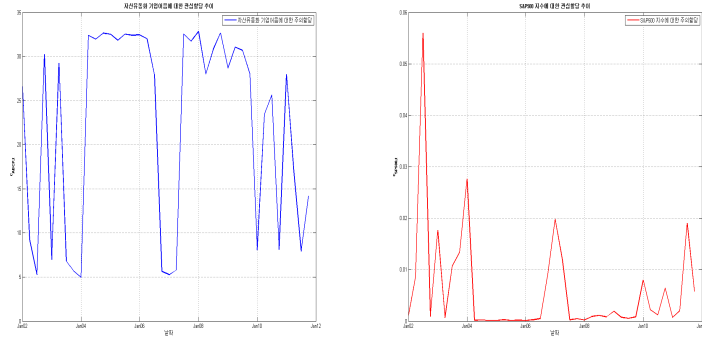


그림 27: $c_{ABCP,t}^*$ 와 $c_{S,t}^*$ 의 분기별 변화

이제 균형에서 두 자산의 가격은 아래의 식을 통하여 계산할 수 있다. 이때 단일 값 파라미터를 포함하는 행렬의 경우 하첨자 t 가 제거되어 있다.

$$E[\tilde{P}_t] = \frac{1}{R_o} \left[\bar{R} - (\rho \Sigma_{R,t}^{-1} + \rho \Pi_t \Sigma_Z^{-1} \Pi_t + \Pi_t)^{-1} \bar{Z} \right]$$

위의 식을 이용하여 그림 28은 영향을 받는 자산이 미 재무성 채권인 경우 ABCP와 미 재무성 채권의 가격의 분기별 변화를 나타낸 것이며, 그림 29는 영향을 받는 자산이 S&P 500 지수인 경우 ABCP와 S&P 500 지수의 가격 변화를 나타낸 것이다.

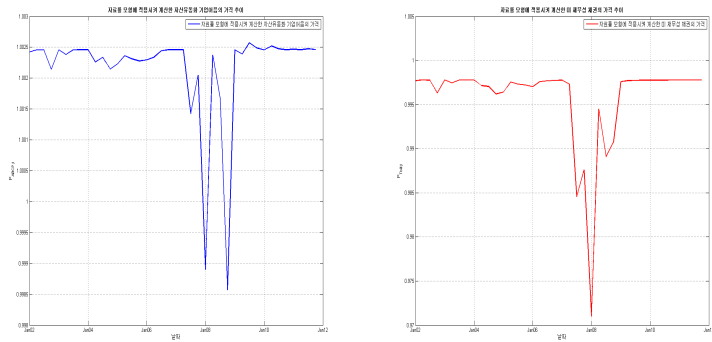


그림 28: ABCP와 미 재무성 채권 수익률의 분기별 변화

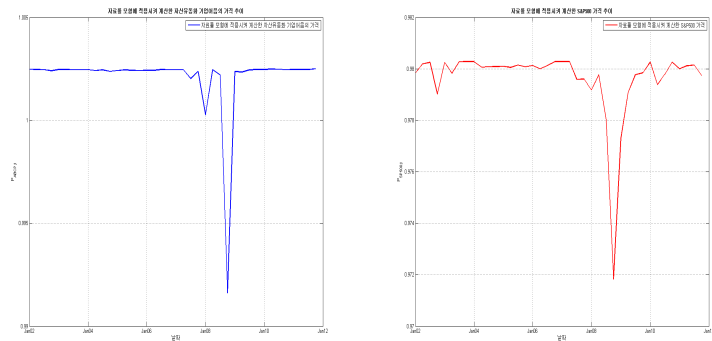


그림 29: ABCP와 S&P 500 지수 수익률의 분기별 변화

위와 같이 계산한 각 자산의 가격을 로그차분하면 수익률을 계산할 수 있다. 그림 30은 영향을 받는 자산이 미 재무성 채권인 경우 미 재무성 채권과 ABCP의 수익률을 계산하여 나타낸 것이며, 그림 31은 영향을

받는 자산이 S&P 500 지수인 경우 S&P 500 지수와 ABCP의 수익률의 변화를 구하여 나타낸 것이다.

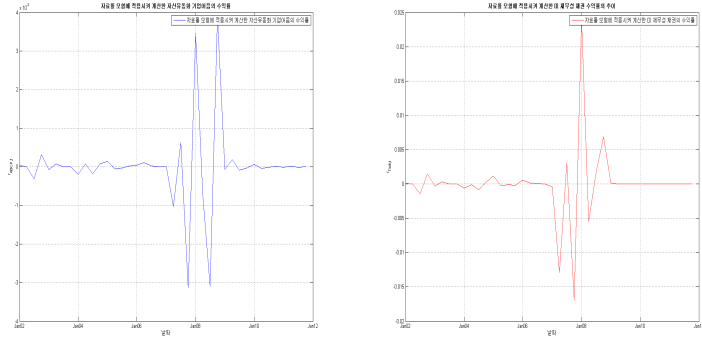


그림 30: ABCP와 미 재무성 채권 수익률의 분기별 변화

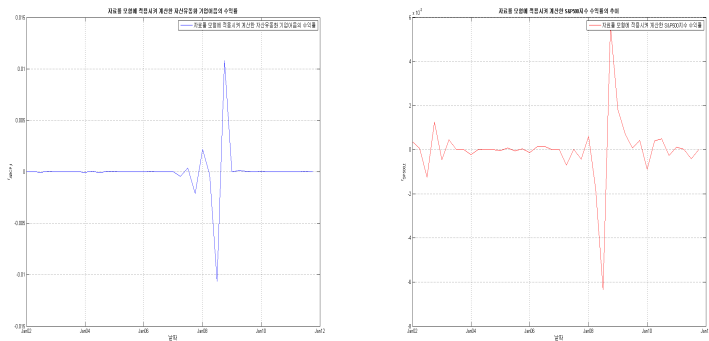


그림 31: ABCP와 S&P 500 지수 수익률의 분기별 변화

이제 실제 수익률 자료를 모형의 결과와 비교함으로써 모형을 평가할 수 있다. 그림 32와 33은 영향을 받는 자산이 미 재무성 채권인 경우 미 재무성 채권과 ABCP의 수익률 자료를 모형의 결과와 비교하여 나타낸 것이다.

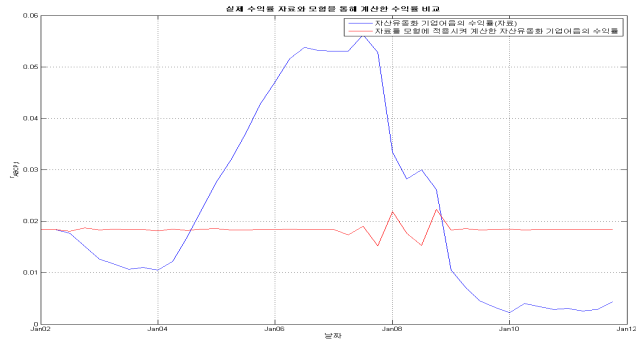


그림 32: 모형의 결과와 실제 ABCP 수익률 변화 비교

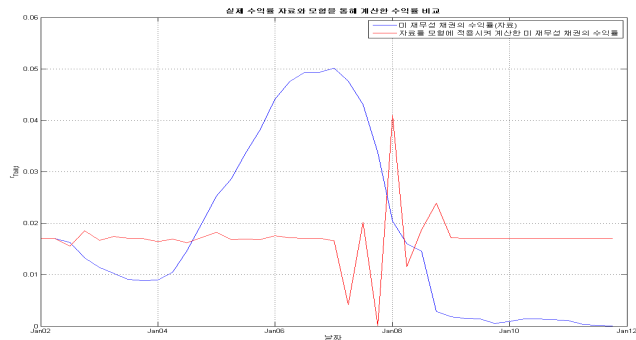


그림 33: 모형의 결과와 실제 미 재무성 채권 수익률 비교

두 그림에서 확인할 수 있듯이 2008년 1분기 이후의 수익률 변화는 모형의 결과와 자료가 거의 비슷한 모습을 보인다. 그러나 2009년 2분기 이후까지 계속되는 감소세는 모형이 설명할 수 없는 것으로 나타난다. 또한 2004년 1분기 이후의 증가세는 모형을 통한 설명이 불가능한 것으로 보인다.

한편 그림 34와 35는 영향을 받는 자산이 S&P 500 지수인 경우 S&P 500 지수와 ABCP의 수익률을 실제 자료와 비교하여 나타낸 것이다.

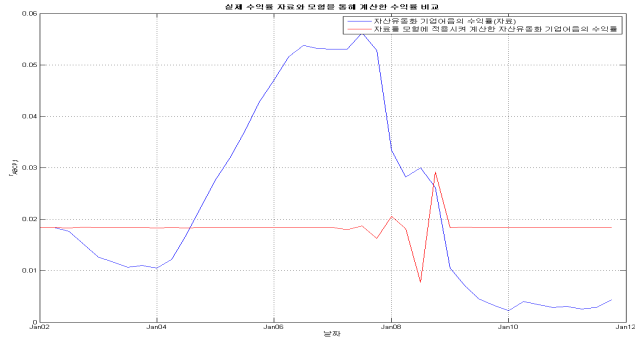


그림 34: 모형의 결과와 실제 ABCP 수익률 비교

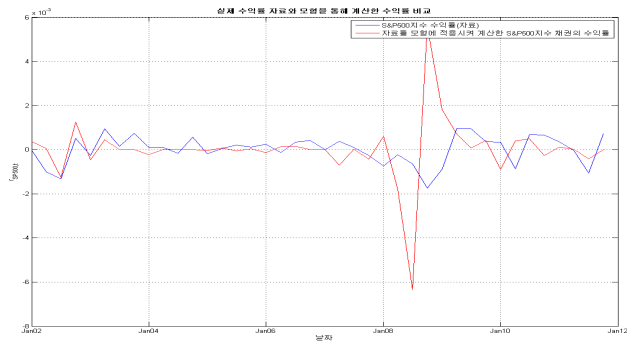


그림 35: 모형의 결과와 실제 S&P 500 지수 수익률 비교

우선 ABCP의 경우 2008년 1분기 이후의 수익률 변화는 모형의 결과와 자료가 거의 비슷한 모습을 보이다가, 2008년 3분기에서 4분기 사이에 증가하고, 2009년 1분기부터 다시 감소하는 추세는 반대로 나타났다. 하지만 그 이후 수익률의 하락세는 모형을 통한 결과에서도 동일하게 나타난다. 그러나 2009년 3분기 이후의 감소세는 모형을 통해서 설명하기 어려운 것으로 드러나며, 2004년 1분기 이후의 증가세 역시 모형을 통해서 설명하기 어려운 것을 확인할 수 있다. 한편 S&P 500 지수의

수익률의 경우 실제 수익률과 모형의 결과가 거의 일치하는 모습을 보인다. 그러나 2008년 1분기에서 3분기 사이의 감소세는 모형의 결과가 매우 크게 나타나며, 이후의 증가세 역시 모형의 결과가 훨씬 크게 드러난다.

2.2.2.3 결과 정리 및 평가

이 절에서는 자료를 모형에 적용한 결과를 요약하여 서술하도록 한다. 모든 파라미터의 분기별 변화를 적용한 경우와 수익률의 변동성만을 변화시킨 경우 모두 2008년 이후의 수익률 변화는 실제 수익률 자료와 동일한 방향으로 변화하는 모습을 보인다. 단 2009년 말 이후에도 계속되는 수익률의 감소 추세까지 모형을 통해 정확히 드러나지는 않는 모습이다.

하지만 모든 자산에 대하여 동일하게 나타나는 2004년 이후의 가파른 상승세는 모형을 통해서 설명이 불가능하며, 2006년에서 2008년 까지의 기간에 대한 설명력도 부족한 것으로 나타난다. 이는 2003년 이후 가파르게 증가한 글로벌 유동성을 고려할 때, 이러한 유동성 효과에 대한 고려가 이루어지지 않았기 때문이라 할 수 있다. 또한 2006년에서 2008년까지에 이르는 기간동안 가파르게 하락하는 수익률 역시 모형을 통하여 설명할 수 없는 부분이다.

실제로 자료를 모형에 적용하는 데 있어 순공급 자료의 문제를 지적하지 않을 수 없다. 자산의 순공급 관련 자료의 경우 공시의 의무가 없고, 공시가 된다 하더라도 이를 자유롭게 열람할 수 없는 구조이다. 따라서 본 논문에서 사용된 순공급 자료의 경우에도 만기구분 없이 사용되었으며, 수익률 자료의 경우 일별 자료를 구하여 분기별 변동성을 구하는데 어려움이 없었던 반면, 순공급 자료는 분기별 자료 사이에서 편차의 자승을 구하여 변동성을 대신하였기 때문에 자료의 정확성에

문제가 있다.

따라서 근본적으로 보다 정치화된 순공급 자료를 사용하여 모형에 적용하는 시도가 우선되며, 모형의 파라미터 또는 모형 자체를 개선하여 실제 수익률에 대한 설명력을 높이는 연구가 요구되며, 이는 앞으로의 추후의 연구 과제가 된다고 할 수 있다.

제 3 장

결론

본 논문은 최근의 금융위기 기간동안 미국 내 금융 시장 사이에 충격의 전이가 일어났음을 전제로 하여 서로 다른 금융 시장 사이의 변동성 충격 전이 메카니즘을 설명할 수 있는 하나의 이론으로서 Mondria (2010) 모형의 수치 해를 계산하고, 이를 통해 모형의 함의를 드러내었다. 또한 실제 자료를 모형에 적용시킴으로써 모형을 평가하였다.

Mondria (2010)에 따르면, 투자자는 수익으로부터 얻는 신호를 관측하고, 균형 가격에 대한 고려를 통하여 각 자산 수익에 관한 정보에 얼마만큼의 주의를 기울일 것인지를 결정한다. 그러나 투자자는 자산으로부터 얻는 수익에 관한 정보를 처리하는데 제약이 있으며, 따라서 자신의 정보처리능력 하에 주의를 할당한다. 이러한 과정에서 불확실성이 큰 자산에 상대적으로 더 많은 주의를 할당하게 되며, 이러한 차이는 상대적으로 적은 주의를 할당한 자산에 대하여 투자자로 하여금 불확실성이 증대되는 믿음을 형성한다. 이러한 주의 재할당의 과정을 통하여, 궁극적으로 해당 자산의 가격을 하락시키는 결과를 가져온다. 이것은 한 자산 시장에서 발생한 불확실성이 서로 관계가 없는 다른 자산시장으로 전이되어, 가격에 영향을 미치는 것으로서 변동성 충격의 전이를 의미하는 것이다.

그러나 이러한 메카니즘은 변동성 충격의 전이를 설명하는 여러 메카니즘 중 하나로서 고려되어야 한다. 충격의 전이를 설명하는 여러 해석이 가능할 수 있기 때문이다. 또한 어디까지나 두 자산에 대한 투자선택을 고려하는 투자자를 가정하였으므로, 결과를 다양한 자산을 이용하여 포트폴리오를 구성하는 투자자에 그대로 적용시키기 어렵

다는 한계점이 존재한다.

한편 미 재무성 채권과 S&P 500 지수, 그리고 자산유동화 기업어음에 관한 자료를 모형에 적용하여 얻은 결과로써 수익률과 실제 수익률을 비교해 본 결과 2008년 이후 각 자산 수익률의 하락세는 모형을 통하여서도 확인할 수 있었다. 그러나 2004년 이후의 가파른 상승세에 이어 2006년에서 2008년 사이의 하락세, 그리고 2009년 이후 계속되는 하락세는 모형으로 설명이 어려운 부분임이 드러났다.

우선 순공급 자료의 적합성 문제부터 파라미터를 계산하는 데 있어 보다 정치화된 분석이 요구되며, 설명력을 높이기 위하여 모형을 개선하는 연구가 필요하다고 할 수 있다. 또한 본 논문의 분석을 토대로 하여 향후 연구과제로서 금융부문이 실물부문에 미치는 영향과 메카니즘에 관한 분석을 제시할 수 있다. 한 나라 경제에서 금융 부문이 차지하는 비중이 커지는 현실을 고려할 때 이는 필수적인 연구 과제라 할 수 있다.

부 록

부록 1 : 정보처리제약식의 도출

정보이론(Information theory)에 따르면 정보의 흐름(flow)은 정보 내 존재하는 불확실성(uncertainty)이 감소하는 비율(rate)로 측정할 수 있다. 그리고 엔트로피는 이러한 불확실성을 측정하는 개념이다. 확률 변수 X 의 엔트로피(entropy) $H(X)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$H(X) = -E \ln[p(X)] = - \int p(x) \ln p(x) dx$$

이때 $p(x)$ 는 연속확률밀도함수를 의미한다.

그리고 상호정보량(mutual information)이란 하나의 정보를 이미 알고 있는 상태에서 다른 하나의 정보를 측정할때, 모르는 상태와 비교하여 줄어드는 불확실성(uncertainty)의 정도를 측정하는 것이다. 즉, 두 확률 변수 X 와 Y 에 대하여 Y 를 조건부로 할때 X 의 엔트로피(Entropy)가 감소하는 정도로서 상호정보량($I(X;Y)$)은 다음과 같이 정의된다.

$$I(X;Y) = \int_Y \int_X p(x,y) \ln \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} dx dy = H(X) - H(X|Y)$$

한편 개별 위험 자산(risky asset)의 수익률, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2 가 정규분포를 따르므로 위험자산(risky asset)들의 수익률 조합, $\tilde{R} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)'$ 은 다변수 정규분포(multivariate normal distribution)를 따른다. 따라서 수익률 조합(\tilde{R})의 연속확률밀도 함수는 다음과 같다.

$$f_{\tilde{R}} = \frac{1}{2\pi |Var(\tilde{R})|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\tilde{R} - \bar{R})' Var(\tilde{R})^{-1} (\tilde{R} - \bar{R}) \right)$$

따라서 엔트로피의 정의에 따라 위험자산의 수익률 조합(\tilde{R})에 대한 엔

트로피는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
H(\tilde{R}) &= -E \left[\ln \left\{ \frac{1}{2\pi |Var(\tilde{R})|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\tilde{R} - \bar{R})' Var(\tilde{R})^{-1} (\tilde{R} - \bar{R}) \right) \right\} \right] \\
&= -E \left[\ln \left(\frac{1}{2\pi |Var(\tilde{R})|^{1/2}} \right) - \frac{1}{2} (\tilde{R} - \bar{R})' Var(\tilde{R})^{-1} (\tilde{R} - \bar{R}) \right] \\
&= \ln(2\pi |Var(\tilde{R})|^{-1/2}) + \frac{1}{2} E \left[(\tilde{R} - \bar{R})' Var(\tilde{R})^{-1} (\tilde{R} - \bar{R}) \right] \\
&= \ln(2\pi |Var(\tilde{R})|^{1/2}) + \frac{1}{2} E \left[trace \left((\tilde{R} - \bar{R})' Var(\tilde{R})^{-1} (\tilde{R} - \bar{R}) \right) \right] \\
&= \ln(2\pi |Var(\tilde{R})|^{1/2}) + \frac{1}{2} E \left[trace \left((\tilde{R} - \bar{R}) (\tilde{R} - \bar{R})' Var(\tilde{R})^{-1} \right) \right] \\
&= \ln(2\pi |Var(\tilde{R})|^{1/2}) + \frac{1}{2} trace \left(E \left[(\tilde{R} - \bar{R}) (\tilde{R} - \bar{R})' \right] Var(\tilde{R})^{-1} \right) \\
&= \ln(2\pi |Var(\tilde{R})|^{1/2}) + \frac{1}{2} trace(Var(\tilde{R}) Var(\tilde{R})^{-1}) \\
&= \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln(|Var(\tilde{R})|) + 1
\end{aligned}$$

그리고 상호정보량의 정의에 따라 정보처리제약(information constraint)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
H(\tilde{R}) - H(\tilde{R} | \tilde{Y}_i) &\leq \kappa \\
\ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln(|Var(\tilde{R})|) + 1 - \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(|Var(\tilde{R} | \tilde{Y}_i)|) - 1 &\leq \kappa
\end{aligned}$$

$$\therefore \ln(|Var(\tilde{R})|) - \ln(|Var(\tilde{R} | \tilde{Y}_i)|) \leq 2\kappa$$

한편 위의 정보처리제약은 1기 투자자의 문제를 푸는 과정에서 목적 함수에 대입되는데, 이때 투자자의 주의 할당 가중치로서 C_i 에 대하여 나타낼 수 있다. 위의 정보처리 제약을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$| \text{Var}(\tilde{R})\text{Var}(\tilde{R} | \tilde{Y}_i)^{-1} | \leq e^{2\kappa}$$

$\text{Var}(\tilde{R})$ 은 Σ_R 이며, $\text{Var}(\tilde{R} | \tilde{Y}_i)$ 를 구하면 정보처리제약을 구체적으로 계산할 수 있다.

(\tilde{R}, \tilde{Y}_i) 는 정규분포를 따르며, D 를 (\tilde{R}, \tilde{Y}_i) 의 공분산 행렬로 정의하면 다음과 같다.

$$D = \begin{pmatrix} \text{Var}(\tilde{R}) & \text{Cov}(\tilde{R}, \tilde{Y}_i) \\ \text{Cov}(\tilde{Y}_i, \tilde{R}) & \text{Var}(\tilde{Y}_i) \end{pmatrix}$$

행렬 D 의 각 원소를 계산하여, D 행렬을 다시쓰면 다음과 같다.

$$\text{Var}(\tilde{Y}_i) = \text{Var}(C_i \tilde{R} + \tilde{\epsilon}_i) = C_i \text{Var}(\tilde{R}) C_i' + \text{Var}(\tilde{\epsilon}_i) = C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i$$

$$\text{Cov}(\tilde{R}, \tilde{Y}_i) = \text{Cov}(\tilde{R}, C_i \tilde{R} + \tilde{\epsilon}_i) = \text{Var}(\tilde{R}) C_i' = \Sigma_R C_i'$$

$$\text{Cov}(\tilde{Y}_i, \tilde{R}) = \text{Cov}(C_i \tilde{R} + \tilde{\epsilon}_i, \tilde{R}) = C_i \text{Var}(\tilde{R}) = C_i \Sigma_R$$

$$D = \begin{pmatrix} \Sigma_R & \Sigma_R C_i' \\ C_i \Sigma_R & C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i \end{pmatrix}$$

이제 $\tilde{R} | \tilde{Y}_i$ 의 분포를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\tilde{R} | \tilde{Y}_i \sim N(\bar{R} + \Sigma_R C_i' (C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i)^{-1} (\tilde{Y}_i - \bar{Y}), \Sigma_R - \Sigma_R C_i' (C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i)^{-1} C_i \Sigma_R)$$

따라서 $\text{Var}(\tilde{R} | \tilde{Y}_i)$ 는 다음과 같다.

$$\text{Var}(\tilde{R} | \tilde{Y}_i) = \Sigma_R - \Sigma_R C_i' (C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i)^{-1} C_i \Sigma_R$$

한편 역행렬이 존재하는 행렬, A, B, C , 그리고 D 에 대하여 $A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$ 임을 이용하면, $\text{Var}(\tilde{R} | \tilde{Y}_i)$ 는 다음과

같이 간단하게 나타낼 수 있다.

$$\text{Var}(\tilde{R} \mid \tilde{Y}_i) = (\Sigma_R^{-1} + C_i' \Sigma_i^{-1} C_i)^{-1}$$

따라서 최종적으로 정보처리제약을 투자자의 주의할당에 대한 가중치, C_i 에 대하여 나타내면 다음과 같다.

$$\therefore |I + \Sigma_R C_i' \Sigma_i^{-1} C_i| \leq e^{2\kappa}$$

부록 2 : 평균-분산 목적함수의 도출

투자자의 다음기 부, W'_i 는 정규분포를 따르는 변수들로 이루어진 함수로써 마찬가지로 정규분포를 따르며, 따라서 확실성등가부는 로그-정규분포를 따른다. 한편 로그-정규분포를 따르는 확률변수 X 의 평균은 $\exp(\mu + (1/2)\sigma^2)$ (이때 μ 는 $\ln(X)$ 의 평균, σ^2 는 $\ln(X)$ 의 분산) 이므로 조건부 기대확실성등가부는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(-\frac{W'_i}{\rho}\right) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}\right] &= \exp\left(E\left[-\frac{W'_i}{\rho} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}\right] + \frac{1}{2}\text{Var}\left(\frac{W'_i}{\rho} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{\rho}E[W'_i \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] + \frac{1}{2\rho^2}\text{Var}(W'_i \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P})\right) \end{aligned}$$

이제 -로그에 기대값을 취하면, 평균-분산 효용함수를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} E\left[-\ln E\left[\exp\left(-\frac{W'_i}{\rho}\right) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}\right]\right] &= E\left[\frac{1}{\rho}E[W'_i \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] - \frac{1}{2\rho^2}\text{Var}(W'_i \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P})\right] \\ &= E\left[\frac{1}{\rho}\left(E[W'_i \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] - \frac{1}{2\rho}\text{Var}(W'_i \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P})\right)\right] \end{aligned}$$

$$\therefore EU_i = \frac{1}{\rho}E\left[E[W'_i \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] - \frac{1}{2\rho}\text{Var}(W'_i \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P})\right]$$

부록 3 : 예산제약식의 도출

초기에 투자자 i 가 보유하고 있는 두 위험자산(risky asset)의 보유량(holding)을 $X_i = (X_{i1}, X_{i2})'$, 무위험자산(risk free asset)보유량을 D_{R_f} 라 하고, 두 위험자산들의 초기 가격을 $\tilde{P} = (\tilde{P}_1, \tilde{P}_2)'$, 무위험자산의 수익률을 R_f 라 하고, 다음 기 무위험자산의 가격을 1이라 하면, 투자자 i 의 초기 부(W_{i0})는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$W_{i0} = X_{i1}\tilde{P}_1 + X_{i2}\tilde{P}_2 + \frac{D_{rf}}{R_f}$$

한편 투자자 i 가 다음 기에 얻는 수익은 위험자산으로부터 얻는 수익과 무위험자산으로부터 얻는 수익들의 합이며, 우선 위험자산으로부터 얻는 수익은 위험자산의 수익률 조합, $\tilde{R} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$ 과 다음 기 위험자산 보유량의 곱으로 나타낼 수 있으며, 무위험자산으로부터 얻는 수익은 다음 기의 가격을 1이라고 가정하였으므로 D_{R_f} 이다. 따라서 투자자 i 의 다음기 부는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$W_{i1} = D_{R_f} + X_{i1}\tilde{r}_1 + X_{i2}\tilde{r}_2$$

이제 초기 부(W_{i0})를 무위험자산(risk free asset)보유량(D_{R_f})에 대하여 정리한 후, 이를 투자자 i 의 다음기 부에 대입하면 투자자 i 의 예산제약식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} W_{i1} &= R_f(W_{i0} - X_{i1}\tilde{P}_1 - X_{i2}\tilde{P}_2) + X_{i1}\tilde{r}_1 + X_{i2}\tilde{r}_2 \\ &= W_{i0}R_f + X_{i1}(\tilde{r}_1 - R_f\tilde{P}_1) + X_{i2}(\tilde{r}_2 - R_f\tilde{P}_2) \end{aligned}$$

$$\therefore W_{i1} = W_{i0}R_f + X_i'(\tilde{R} - R_f\tilde{P})$$

부록 4 : 2기 투자자의 문제

이제 제약식을 목적함수에 넣으면 다음과 같은 과정을 통하여 효용함수를 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 U_i &= \frac{1}{\rho} \left(E[W_{i0}R_f + X_i'(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] - \frac{1}{2\rho} \text{Var}[W_{i0}R_f + X_i'(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right) \\
 &= \frac{1}{\rho} E[W_{i0}R_f + X_i'(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] - \frac{1}{2\rho^2} \text{Var}[X_i'(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \\
 &= \frac{1}{\rho} E[W_{i0}R_f + X_i'(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \\
 &\quad - \frac{1}{2\rho^2} E \left[\{X_i'(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) - E[X_i'(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]\} \{X_i'(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) - E[X_i'(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]\}' \right] \\
 &= \frac{1}{\rho} E[W_{i0}R_f + X_i'(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] - \frac{1}{2\rho^2} E \left[\{X_i'\tilde{R} - E[X_i'\tilde{R} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]\} \{X_i'\tilde{R} - E[X_i'\tilde{R} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]\}' \right] \\
 &= \frac{1}{\rho} E[W_{i0}R_f + X_i'(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] - \frac{1}{2\rho^2} X_i' E \left[\{\tilde{R} - E[\tilde{R} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]\} \{\tilde{R} - E[\tilde{R} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]\}' \right] X_i \\
 \\
 U_i &= \frac{1}{\rho} E[W_{i0}R_f + X_i'(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] - \frac{1}{2\rho^2} X_i' \text{Var}[\tilde{R} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] X_i
 \end{aligned}$$

이제 정리한 위의 목적함수를 극대화시키는 자산보유량, $X_i(\tilde{Y}_i, \tilde{P})$ 를 구하기 위하여 X_i 에 대하여 1계조건을 구하면 다음과 같습니다.

1계조건

$$\frac{1}{\rho} E[\tilde{R} - R_f\tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] - \frac{1}{2\rho^2} 2\text{Var}[\tilde{R} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] X_i = 0$$

$$\therefore X_i(\tilde{Y}_i, \tilde{P}) = \rho V_i^{-1} E[\tilde{R} - R_f\tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]$$

$$\text{where } V_i = \text{Var}[\tilde{R} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]$$

부록 5 : 1기 투자자의 목적함수 도출

최적 자산보유량을 이용하여 기대확실성등가부 목적함수는 다음의 과정을 통하여 구할 수 있습니다.

$$EU_i = E \left[\frac{1}{\rho} E[W_{i0}R_f + X_i'(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] - \frac{1}{2\rho^2} X_i' V_i X_i \right]$$

$$\text{where } X_i(\tilde{Y}_i, \tilde{P}) = \rho V_i^{-1} E[\tilde{R} - R_f\tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \text{ and } V_i = \text{Var}[\tilde{R} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]$$

$$\begin{aligned} EU_i &= E \left[\frac{1}{\rho} E[W_{i0}R_f + \{\rho V_i^{-1} E[\tilde{R} - R_f\tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]\}'(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right] \\ &\quad - E \left[\frac{1}{2\rho^2} \{\rho V_i^{-1} E[\tilde{R} - R_f\tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]\}' V_i \{\rho V_i^{-1} E[\tilde{R} - R_f\tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]\} \right] \\ &= \frac{1}{\rho} E \left[E[W_{i0}R_f + \rho E[\tilde{R} - R_f\tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]' V_i^{-1} (\tilde{R} - R_f\tilde{P}) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right] \\ &\quad - E \left[\frac{1}{2\rho^2} \rho^2 E[\tilde{R} - R_f\tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]' V_i^{-1} V_i V_i^{-1} E[\tilde{R} - R_f\tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right] \\ &= \frac{W_{i0}R_f}{\rho} + E \left[E[\tilde{R} - R_f\tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]' V_i^{-1} E[(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} E \left[E[\tilde{R} - R_f\tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]' V_i^{-1} E[\tilde{R} - R_f\tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right] \end{aligned}$$

그런데 임의의 확률변수 X 와 Y 에 대하여 $\text{Var}(Y) = E[\text{Var}(Y \mid X)] + \text{Var}(E[Y \mid X])$ 와, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \sim N(\mu, V)$ 이고, $q = x'Ax$ 라 할때 $E[q] = \text{tr}[AV] + \mu'A\mu$ 임을 이용하면, 위 식의 두 번째 항과 세 번째 항의 $E \left[E[\tilde{R} - R_f\tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]' V_i^{-1} E[(\tilde{R} - R_f\tilde{P}) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right]$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
& E \left[E[\tilde{R} - R_f \tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]' V_i^{-1} E[(\tilde{R} - R_f \tilde{P}) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right] \\
&= Tr \left(V_i^{-1} Var \left(E[\tilde{R} - R_f \tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right) \right) + E \left[E[\tilde{R} - R_f \tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right]' V_i^{-1} E \left[E[\tilde{R} - R_f \tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right] \\
&= Tr \left(V_i^{-1} \left\{ Var(\tilde{R} - R_f \tilde{P}) - Var(\tilde{R} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}) \right\} \right) + E \left[E[\tilde{R} - R_f \tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right]' V_i^{-1} E \left[E[\tilde{R} - R_f \tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right] \\
&= Tr \left(V_i^{-1} Var(\tilde{R} - R_f \tilde{P}) - I \right) + E \left[E[\tilde{R} - R_f \tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right]' V_i^{-1} E \left[E[\tilde{R} - R_f \tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right] \\
& E \left[E[\tilde{R} - R_f \tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}]' V_i^{-1} E[(\tilde{R} - E[R_f \tilde{P}]) \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right] = Tr \left(V_i^{-1} Q - I \right) + \tilde{R}^e' V_i^{-1} \tilde{R}^e
\end{aligned}$$

이제 위 식을 통하여 다시 목적함수를 정리하면 다음과 같다.

$$EU_i = \frac{W_{i0} R_f}{\rho} + \frac{1}{2} \left\{ Tr \left(V_i^{-1} Q - I \right) + \tilde{R}^e' V_i^{-1} \tilde{R}^e \right\}$$

where

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^e &= E \left[E[\tilde{R} - R_f \tilde{P} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right] \\
Q &= Var(\tilde{R} - R_f \tilde{P})
\end{aligned}$$

Q를 계산하면, 다음과 같다.

$$Q = Var(\tilde{R} - R_f \tilde{P}) = Var(\tilde{R}) + R_f^2 Var(\tilde{P}) - R_f Cov(\tilde{R}, \tilde{P}) - R_f Cov(\tilde{P}, \tilde{R})$$

그런데 자산보유량(asset holdings) 조합 벡터, \tilde{R} 과 순자산공급벡터(net supply of assets), \tilde{Z} 가 독립이므로, 이를 이용하여 Q의 각 항으로서 $Var(\tilde{P}), Cov(\tilde{R}, \tilde{P}), Cov(\tilde{P}, \tilde{R})$ 을 구하면 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
Var(\tilde{P}) &= Var(A_0 + A_1 \tilde{R} + A_2 \tilde{Z}) = A_1 \Sigma_R A_1' + A_2 \Sigma_Z A_2' \\
Cov(\tilde{R}, \tilde{P}) &= Cov(\tilde{R}, A_0 + A_1 \tilde{R} + A_2 \tilde{Z}) = Var(\tilde{R}) A_1' = \Sigma_R A_1'
\end{aligned}$$

$$Cov(\tilde{P}, \tilde{R}) = Cov(A_0 + A_1 \tilde{R} + A_2 \tilde{Z}, \tilde{R}) = A_1 Var(\tilde{R}) = A_1 \Sigma_R$$

$$\therefore Q = \Sigma_R + R_f^2 A_1 \Sigma_R A_1' + R_f^2 A_2 \Sigma_r A_2' - R_f \Sigma_R A_1' - R_f A_1 \Sigma_R$$

한편 \bar{R}^e 를 계산하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{R}^e &= E \left[E[\tilde{R} \mid \tilde{Y}_i, \tilde{P}] \right] \\ &= \bar{R} - R_f(A_0 + A_1 \bar{R} - A_2) \bar{Z} \end{aligned}$$

이제 부록 4에서 구한 A_0, A_1 , 그리고 A_2 를 대입하면 \bar{R}_e 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\therefore \bar{R}^e = (\rho \Sigma_R + \Pi + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi)^{-1} \bar{Z}$$

부록 6 : 합리적 기대균형 가격 도출 (rational expectations equilibrium price vector)

Mondria (2010)의 방식대로, Admati (1985)의 방법론을 따라 가격 벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$\tilde{P} = A_0 + A_1 \tilde{R} - A_2 \tilde{Z}$$

\tilde{P} 가 위와 같다면, 모든 투자자 i 에 대하여 $(\tilde{R}, \tilde{Y}_i, \tilde{P})$ 는 정규분포를 따르며, 따라서 시그널, \tilde{Y}_i 와 가격, \tilde{P} 을 조건부로 하는 수익의 확률밀도 함수 $f(\tilde{R} | \tilde{Y}_i, \tilde{P})$ 는 다변수 정규분포를 따른다. 그리고 평균과 분산을 다음과 같이 정의하자.

$$E[\tilde{R} | \tilde{Y}_i, \tilde{P}] = B_{0i} + B_{1i} \tilde{Y}_i + B_{2i} \tilde{P}$$

$$Var(\tilde{R} | \tilde{Y}_i, \tilde{P}) = V_i$$

각 투자자 i 가 균형 가격 함수(equilibrium price function)을 위와 같이 믿을 때, 투자자는 다음과 같은 방식으로 자신의 믿음(belief)을 형성한다. 균형수요 함수(equilibrium demand function)는 따라서 다음과 같다.

$$X_i(\tilde{Y}_i, \tilde{P}) = \rho V_i^{-1} E[\tilde{R} - R_f \tilde{P} | \tilde{Y}_i, \tilde{P}] = \rho V_i (B_{0i} + B_{1i} \tilde{Y}_i + (B_{2i} - R_f I) \tilde{P})$$

따라서 시장청산조건(market clearing condition), $\int_0^1 X_i di$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_0^1 \rho V_i^{-1} (B_{0i} + B_{1i} \tilde{Y}_i + (B_{2i} - R_f I) \tilde{P}) di = \tilde{Z}$$

이제 미정계수법을 사용하면, 다음의 조건들이 성립할 때, $\tilde{P} = A_0 +$

$A_1\tilde{R}-A_2\tilde{Z}$ 는 합리적 기대균형 가격벡터(rational expectations equilibrium price)를 만족한다.

$$\begin{aligned} A_2^{-1} &= \int_0^1 \rho V_i (R_f I - B_{2i}) di \\ A_1 &= A_2 \int_0^1 \rho V_i^{-1} B_{1i} C_i di \\ A_0 &= A_2 \int_0^1 \rho V_i^{-1} B_{0i} di \\ 0 &= \int_0^1 \rho V_i^{-1} B_{1i} \tilde{\epsilon}_i di \end{aligned}$$

이제 $V_i^{-1}B_{1i}C_i$ 가 A_0, A_1 , 그리고 A_2 와 독립이며, 단순히 $C_i'\Sigma_i C_i$ 와 같음을 보임으로써 $A_2^{-1}A_1$ 을 구할 수 있다.

정규분포 이론¹을 이용하면, B_{1i}, B_{2i} , 그리고 V_i 는 다음을 만족한다.

¹정규 분포를 따르는 다음의 확률변수 $X = (x_1, x_2)$ 를 고려해보자.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

where $E[x_1] = \mu_1, E[x_2] = \mu_2$, 그리고 Σ 는 X 의 공분산 행렬

그러면 다음이 성립한다.

$$x_1 | x_2 \sim N(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})$$

이는 $x_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}x_2$ 와 x_2 가 독립이기 때문인데, 이를 증명하면 다음과 같다.

$X = (x_1, x_2)'$, $X \sim N(\mu, \Sigma)$ 일때(공분산 행렬의 각 원소는 $\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \Sigma_{21}, \Sigma_{22}$) $AX \sim N(A\mu, A\Sigma A')$ (이때, A 는 2x2 행렬)임을 이용한다.

우선 A 를 다음과 같이 놓는다.

$$A = \begin{pmatrix} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

따라서 AX 는 다음의 정규분포를 따른다.

$$AX = \begin{pmatrix} x_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} B_{1i} & B_{2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i & C_i \Sigma_R A_1' \\ A_1 \Sigma_R C_i' & A_1 \Sigma_R A_1' + A_2 \Sigma_Z A_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_R C_i & \Sigma_R A_1' \end{pmatrix}$$

그리고 다음의 두 식을 얻을 수 있다.

$$V_i = \Sigma_R - B_{1i} C_i \Sigma_R - B_{2i} A_1 \Sigma_R$$

$$B_{1i}(C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i) + B_{2i}(A_1 \Sigma_R C_i') = \Sigma_R C_i'$$

위 식을 더하면 다음의 식이 도출된다.

$$V_i^{-1} = (B_{1i} \Sigma_i C_i'^{-1})^{-1} = C_i' \Sigma_i^{-1} B_{1i}^{-1}$$

이제 이를 앞서 구한 $A_2^{-1} A_1 = \int_0^1 \rho V_i^{-1} B_{1i} C_i di$ 에 대입하면, $A_2^{-1} A_1 = \int_0^1 \rho C_i' \Sigma_i^{-1} C_i di$ 를 구할 수 있으며, 이제 Π 를 다음과 같이 정의하자.

$$\Pi = \int_0^1 \rho V_i^{-1} B_{1i} di = \int_0^1 \rho C_i' \Sigma_i^{-1} C_i di$$

이제 (B_{1i}, B_{2i}) 에 관하여 식을 정리하면, 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} B_{1i} & B_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_R C_i' & \Sigma_R A_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i & C_i \Sigma_R A_1' \\ A_1 \Sigma_R C_i' & A_1 \Sigma_R A_1' + A_2 \Sigma_Z A_2' \end{pmatrix}^{-1}$$

다음의 역행렬 공식을 이용하면, (B_{1i}, B_{2i}) 에 대한 우변의 역행렬을 풀어서 계산할 수 있다.

$x_1 - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} x_2$ 는 x_1 과 x_2 의 선형 결합으로서 정규분포를 따르므로 $Cov(x_1 - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} x_2, x_2) = 0$ 임을 보이기만 하면, $x_1 - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} x_2$ 와 x_2 가 독립임을 증명하는 것이 된다.

$$\therefore x_1 - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} x_2 \perp x_2$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (C_i \Sigma_R C_i')^{-1} + (C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i)^{-1} C_i \Sigma_R A_1' L_i A_1 \Sigma_R C_i' (C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i)^{-1} & -(C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i)^{-1} C_i \Sigma_R A_1' L_i \\ -L_i A_1 \Sigma_R C_i' (C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i)^{-1} & L_i \end{pmatrix}$$

where

$$L_i = \left[A_1 \left(\Sigma_R - \Sigma_R C_i' (C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i)^{-1} C_i \Sigma_R \right) A_1' + A_2 \Sigma_Z A_2' \right]^{-1}$$

이제 다음과 같이 K_i 와 H_i 를 정의하자.

$$K_i \equiv \Sigma_R - \Sigma_R C_i' (C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i)^{-1} C_i \Sigma_R$$

$$H_i \equiv A_1^{-1} L_i^{-1} (A_1^{-1})' = K_i + \Pi^{-1} \Sigma_Z \Pi^{-1}$$

그러면 B_{1i} 와 B_{2i} 는 다음과 같이 간단하게 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} B_{1i} &= \left[I + \text{bigg} \{ -\Sigma_R + \Sigma_R C_i' (C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i)^{-1} C_i \Sigma_R \} A_1' L_i A_1 \right] \Sigma_R C_i' (C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i)^{-1} \\ &= (I - K_i H_i^{-1}) \Sigma_R C_i' (C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i)^{-1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} B_{2i} &= \left[\Sigma_R - \Sigma_R C_i' (C_i \Sigma_R C_i' + \Sigma_i)^{-1} C_i \Sigma_R \right] (A_1^{-1} L_i^{-1} (A_1^{-1})')^{-1} A_1^{-1} \\ &= K_i H_i^{-1} A_1^{-1} = K_i H_i^{-1} \Pi^{-1} A_2^{-2} \end{aligned}$$

이제 행렬의 역행렬 합의 규칙(inverting sum of matrices)으로서, $(R - STU)^{-1} = R^{-1} - R^{-1}S(T^{-1} + UR^{-1}S)^{-1}UR^{-1}$ 을 이용하면 $K_i = (\Sigma_R^{-1} + C_i' \Sigma_i^{-1} C_i)^{-1}$ 임을 얻을 수 있고, 이와 함께 $V_i = \Sigma_R - B_{1i} C_i \Sigma_R - B_{2i} A_1 \Sigma_R$ 의 식에 이제까지 구한 값들을 모두 대입하면, 마침내 V_i 를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
V_i &= \Sigma_R - B_{1i}C_i\Sigma_R - B_{2i}A_1\Sigma_R \\
&= \Sigma_R - (I - K_iH_i^{-1})\Sigma_R C_i'(C_i\Sigma_R C_i' + \Sigma_i)^{-1}C_i\Sigma_R - K_iH_i^{-1}\Sigma_R \\
&= K_i - K_iH_i^{-1}K_i \\
&= K_i - K_i(K_i + \Pi^{-1}\Sigma_Z\Pi^{-1})^{-1}K_i
\end{aligned}$$

역행렬이 존재하는 행렬 A, B , 그리고 C 에 대하여 $A^{-1} - (A + C)^{-1} = A^{-1}(A^{-1} + C^{-1})^{-1}A^{-1}$ 가 성립하므로 이를 이용하면 V_i 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
V_i &= (K_i^{-1} + \Pi\Sigma_Z^{-1}\Pi)^{-1} \\
\therefore V_i &= \Sigma_R^{-1} + C_i'\Sigma_i^{-1}C_i + \Pi\Sigma_Z^{-1}\Pi
\end{aligned}$$

부록 7 : 비조건부, 조건부(주어진 \tilde{Z} 에 대하여)가격의 기대값 도출

부록 4에서 정의한 대로, 가격벡터, \tilde{P} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{P} = A_0 + A_1 \tilde{R} - A_2 \tilde{Z}$$

이 절에서는 벡터 \tilde{P} 에 대한 각 항의 계수행렬, A_0, A_1 , 그리고 A_2 를 계산하고, 이를 통하여 비조건부 가격의 기대값, $E[\tilde{P}]$ 와 자산의 순공급 조건부 가격의 기대값, $E[\tilde{P} | \tilde{Z}]$ 을 계산한다.

우선 A_2 는 부록 4의 과정을 통하여 다음을 만족한다.

$$A_2 = \left(\int_0^1 \rho V_i^{-1} R_f di \right)^{-1} \left(I + \int_0^1 \rho V_i^{-1} K_i H_i^{-1} \Pi^{-1} di \right)$$

부록 4의 과정에서 구한 $H_i^{-1} = (K_i + \Pi^{-1} \Sigma_Z \Pi^{-1})^{-1}$, $V_i = K_i^{-1} + \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi$ 임을 이용하여 우변의 항을 나누어 각각을 계산하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \rho V_i^{-1} di \right)^{-1} &= \left(\int_0^1 (\Sigma_R^{-1} + C_i' \Sigma_i^{-1} C_i + \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi) di \right)^{-1} \\ &= (\rho \Sigma_R^{-1} + \Pi + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I + \int_0^1 \rho V_i^{-1} K_i H_i^{-1} \Pi^{-1} di &= I + \int_0^1 \rho (K_i^{-1} + \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi) K_i K_i^{-1} (K_i^{-1} + \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi)^{-1} \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi \Pi^{-1} di \\ &= I + \int_0^1 \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} di \\ &= I + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \end{aligned}$$

따라서 A_2 는 다음과 같다.

$$A_2 = \frac{1}{R_f} (\rho \Sigma_R^{-1} + \Pi + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi)^{-1} (I + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1})$$

한편 부록 4를 통하여 A_1 은 다음을 만족한다.

$$A_1 = A_2 \int_0^1 \rho V_i^{-1} B_{1i} C_i di$$

앞서 구한 A_2 를 이용하여 다음과 같이 계산하면, A_1 을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{R_f} (\rho \Sigma_R^{-1} + \Pi + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi)^{-1} (I + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1}) \left(\int_0^1 \rho V_i^{-1} B_{1i} C_i di \right) \\ &= \frac{1}{R_f} (\rho \Sigma_R^{-1} + \Pi + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi)^{-1} (I + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1}) \Pi \end{aligned}$$

따라서 A_1 은 다음과 같다.

$$A_1 = \frac{1}{R_f} (\rho \Sigma_R^{-1} + \Pi + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi)^{-1} (\Pi + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi)$$

마지막으로 $A_0 = A_2 \int_0^1 \rho V_i^{-1} B_{0i} di$ 를 만족하며, $E[\tilde{R} | \tilde{Y}, \tilde{P}] = B_{0i} + B_{1i} C_i \tilde{Y}_i + B_{2i} \tilde{P}$ 이므로, $B_{0i} = \bar{R} - B_{1i} \bar{R} - B_{2i} (A_0 + A_1 \bar{R} - A_2 \bar{Z})$ 라고 쓸 수 있다. 따라서 A_0 는 다음을 만족한다.

$$A_2^{-1} A_0 = \int_0^1 \rho V_i^{-1} (\bar{R} - B_{1i} \bar{R} - B_{2i} (A_0 + A_1 \bar{R} - A_2 \bar{Z})) di$$

따라서 다음의 과정을 통하여 계산하면, A_0 를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
A_2^{-1}A_0 + \int_0^1 \rho V_i^{-1} B_{2i} A_0 di &= \int_0^1 \rho V_i^{-1} \bar{R} (= \rho \Sigma_R^{-1} + \Pi + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi) \bar{R} \\
&\quad - \int_0^1 \rho V_i^{-1} B_{1i} C_i \bar{R} di (= -\Pi \bar{R}) \\
&\quad - \int_0^1 \rho V_i^{-1} B_{2i} A_1 \bar{R} di (= -\rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi \bar{R}) \\
&\quad + \int_0^1 \rho V_i^{-1} B_{2i} A_2 \bar{Z} di (= \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \bar{Z}) \\
(I + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1}) A_2^{-1} A_0 &= \rho \Sigma_R^{-1} + \Pi + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi \bar{R} - \Pi \bar{R} - \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi \bar{R} \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \bar{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_0 &= A_2 (I + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1})^{-1} (\rho \Sigma_R^{-1} \bar{R} + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \bar{Z}) \\
&= \frac{1}{R_f} (\rho \Sigma_R^{-1} + \Pi + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi)^{-1} (\rho \Sigma_R^{-1} \bar{R} + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \bar{Z})
\end{aligned}$$

$$A_0 = \frac{\rho}{R_f} (\rho \Sigma_R^{-1} + \Pi + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi)^{-1} (\Sigma_R^{-1} \bar{R} + \Pi \Sigma_Z^{-1} \bar{Z})$$

이제 비조건부 가격으로서 $E[\tilde{P}]$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
E[\tilde{P}] &= A_0 + A_1 \bar{R} - A_2 \bar{Z} \\
&= (\rho/R_f) (\rho \Sigma_R^{-1} + \Pi + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi)^{-1} (\Sigma_R^{-1} \bar{R} + \Pi \Sigma_Z^{-1} \bar{Z}) \\
&\quad + (1/R_f) (\rho \Sigma_R^{-1} + \Pi + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi)^{-1} (\Pi + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi) \bar{R} \\
&\quad - (1/R_f) (\rho \Sigma_R^{-1} + \Pi + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi)^{-1} (I + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1}) \bar{Z} \\
&= \frac{1}{R_f} (\rho \Sigma_R^{-1} + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi + \Pi)^{-1} \left((\rho \Sigma_R^{-1} + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi + \Pi) \bar{R} - \bar{Z} \right) \\
\therefore E[\tilde{P}] &= \frac{1}{R_f} (\bar{R} - (\rho \Sigma_R^{-1} + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi + \Pi)^{-1} \bar{Z})
\end{aligned}$$

한편 (\tilde{P}, \tilde{Z}) 는 정규분포를 따르며, S 를 (\tilde{P}, \tilde{Z}) 의 공분산 행렬로 정의하

면, S 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$S = \begin{pmatrix} Var(\tilde{P}) & Cov(\tilde{P}, \tilde{Z}) \\ Cov(\tilde{Z}, \tilde{P}) & Var(\tilde{Z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \Sigma_R A_1' + A_2 \Sigma_Z A_2' & A_2 \Sigma_Z \\ \Sigma_Z A_2' & \Sigma_Z \end{pmatrix}$$

따라서 $\tilde{P} | \tilde{Z}$ 의 분포는 다음과 같다.

$$\tilde{P} | \tilde{Z} \sim N(\bar{P} + A_2(\tilde{Z} - \bar{Z}), A_1 \Sigma_R A_1' + A_2 \Sigma_Z A_2' - A_2 \Sigma_Z A_2')$$

이제 비조건부 가격의 기대값을 이용하여 정리하면, 자산의 순공급 조건부 가격의 기대값, $E[\tilde{P} | \tilde{Z}]$ 은 다음과 같다.

$$\therefore E[\tilde{P} | \tilde{Z}] = \frac{1}{R_f} \left(\bar{R} - (\rho \Sigma_R^{-1} + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi + \Pi)^{-1} \bar{Z} + (\rho \Sigma_R^{-1} + \Pi + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1} \Pi)^{-1} (I + \rho \Pi \Sigma_Z^{-1}) (\tilde{Z} - \bar{Z}) \right)$$

부록 8 : 모형의 실험에 사용된 MATLAB 코드

```

clc;
clear
close all;

%% 서울대학교 경제학과 석사과정 2011-20196 학번 최정훈
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% 이 프로그램은 석사학위 논문으로서 '합리적 부주의와 금융시장 간 전이효과'의 2.1절 결과를
%% 구현하는 프로그램입니다.
%
% 프로그램을 실행 시키면 roop에 사용된 변수값을 제외하고 총 5개의 structure가
% 생성되는데 각 structure가 가리키는 것은 다음과 같습니다.
%
% G : 모형 구현에 사용된 grid와 관련된 변수 값들을 지정하여 수록
% P : 모형 구현에 사용된 파라미터 값들을 지정하여 수록
% PP_r : 자산 2 수익의 변동성 증가에 따른 결과를 도출하는데 사용된 파라미터 행렬을 계산
% PP_z : 자산 2 순공급의 변동성 증가에 따른 결과를 도출하는데 사용된 파라미터 행렬을 계산
% result : 결과값들을 수록한 structure로서 두가지 경우, 즉
%         자산 2 수익의 변동성 변화에 기인하는 경우와
%         자산 2 순공급 변동성 변화에 기인하는 경우에 대하여 결과값을 수록.
%
%         1. 투자자가 신호에 부여하는 최적 가중치(c1,c2),
%         2. 조건부 가격 벡터 및 벡터 내 원소(P,p1,p2),
%         3. 비조건부 가격 벡터 및 벡터 내 원소(P|Z, p1|Z, p2|Z),
%         4. 주의 재할당에 따른 자산 1의 posterior variance(var(r1|Y,P))
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% 1. 모형의 파라미터를 지정
P.r1_bar = 1 ; % 자산 1 수익률의 평균
P.r2_bar = 1 ; % 자산 2 수익률의 평균
P.z1_bar = 100 ; % 자산 1의 순공급 평균
P.z2_bar = 100 ; % 자산 2의 순공급 평균
P.sigma_r1 = 0.15 ; % 자산 1 수익률의 변동성(prior)
P.sigma_r2 = 0.15 ; % 자산 2 수익률의 변동성(prior)
P.sigma_z1 = 10 ; % 자산 1 순공급의 변동성(prior)
P.sigma_z2 = 10 ; % 자산 2 순공급의 변동성(prior)
P.rho = 2 ; % 투자자의 위험허용한도
P.kappa_cap = 0.4 ; % 투자자의 정보처리능력
P.Rf = 1.02 ; % 무위험자산의 수익률

%% 2. 자산2의 수익과 순공급의 분산에 임의로 범위를 할당하여 grid를 지정
% grid의 개수 지정
G.n_grid = 20 ;

% 자산 2의 수익의 변동성 grid 생성
G.sigma_r2_max = P.sigma_r2+(1/3)*P.sigma_r2 ;
G.sigma_r2_min = 0.1 ;
G.sigma_r2 = linspace(G.sigma_r2_min, G.sigma_r2_max, G.n_grid) ;

% 자산 2의 순공급의 변동성 grid 생성

```

```

G.sigma_z2_max = P.sigma_z2+(1/3)*P.sigma_z2 ;
G.sigma_z2_min = P.sigma_z2-(1/3)*P.sigma_z2 ;
G.sigma_z2 = linspace(G.sigma_z2_min, G.sigma_z2_max,G.n_grid) ;

%% 자산 2에 대한 최적 가중치(c2*)를 계산
result.c_2_pre = zeros(G.n_grid) ;
for i=1:G.n_grid
    for j=1:G.n_grid
        result.c_2_pre(i,j) = ((G.sigma_r2(i)^(2)*G.sigma_z2(j)^(2)...
            + G.sigma_r2(i)^(2)*P.z2_bar^(2) - P.sigma_r1^(2)*P.sigma_z1^(2)...
            - P.sigma_r1^(2)*P.z1_bar^(2)) + sqrt( (G.sigma_r2(i)^(2)*G.sigma_z2(j)^(2)...
            + G.sigma_r2(i)^(2)*P.z2_bar^(2) - P.sigma_r1^(2)*P.sigma_z1^(2)...
            - P.sigma_r1^(2)*P.z1_bar^(2))^(2) + 4*P.sigma_r1^(2)*G.sigma_r2(i)^(2)*P.z1_bar^(2)*P.z2_bar^
            (2)))...
            /(2*G.sigma_r2(i)^(2)*P.z1_bar*P.z2_bar) ;
    end
end

% Mondria (2010)에서 지정된 파라미터 값에 대하여 c2*의 변화를 계산
% 이때 c2*는 자산 2 수익의 변동성 변화에 따른 c2*(result.c_2_star_r2)와
% 자산 2 순공급의 변동성 변화에 따른 c2*(result.c_2_star_z2)를 생각할 수 있음.
result.c_2_star_r2 = interp1(G.sigma_z2,result.c_2_pre',10) ;
result.c_2_star_z2 = interp1(G.sigma_r2,result.c_2_pre,0.15) ;

%% 계산한 c2*를 이용하여 자산 1에 대한 상대적 가중치를 계산
for ii=1:G.n_grid
    result.c_1_star_r2(ii) = P.sigma_r1^(2)/(result.c_2_star_r2(ii)*G.sigma_r2(ii)) ;
    result.c_1_star_z2(ii) = P.sigma_r1^(2)/(result.c_2_star_z2(ii)*P.sigma_r2) ;
end

%% 자산 2 수익의 변동성 변화에 따라 변하는 c2*에 대하여 비조건부, 조건부 기대가격을 계산
for t=1:G.n_grid
    % 파라미터 행렬 지정
    PP_r.tilde_Z = [normpdf(P.z1_bar,P.sigma_z1^(2)) ; normpdf(P.z2_bar,P.sigma_z2^(2))] ;
    PP_r.Sigma = (P.sigma_r1^(2) + (result.c_2_star_r2(t))^(2)*(G.sigma_r2(t))^(2))/(exp(2*P.kappa_cap)
-1) ; % 시그널의 변동성
    PP_r.R_bar = [P.r1_bar ; P.r2_bar] ; % 자산 수익의 평균 벡터
    PP_r.Z_bar = [P.z1_bar ; P.z2_bar] ; % 자산 순공급의 평균 벡터
    PP_r.Sigma_R = [P.sigma_r1^(2), 0 ; 0, G.sigma_r2(t)^(2)] ; % 두 자산 수익의 공분산 행렬
    PP_r.Sigma_Z = [P.sigma_z1^(2),0 ; 0, P.sigma_z2^(2)] ; % 두 자산 순공급의 공분산 행렬
    PP_r.C = [1,result.c_2_star_r2(t)] ; % 신호에 대하여 투자자가 할당하는 가중치 벡터
    PP_r.Pi = P.rho*(PP_r.Sigma)^(-1)*PP_r.C'*PP_r.C ; % p.20 의 파이 행렬
    PP_r.A2 = (1/P.Rf)*(P.rho*inv(PP_r.Sigma_R) + P.rho*PP_r.Pi*inv(PP_r.Sigma_Z)*PP_r.Pi + PP_r.Pi)^
(-1)*(eye(2) + P.rho*PP_r.Pi*inv(PP_r.Sigma_Z)) ; % Calculating A1

    % 비조건부 기대가격 벡터 계산
    result.r_PP = (1/P.Rf)*(PP_r.R_bar-(P.rho*inv(PP_r.Sigma_R)+P.rho*PP_r.Pi*inv(PP_r.Sigma_Z)*PP_r.
Pi+PP_r.Pi)^(-1)*PP_r.Z_bar) ;

```

```

% 조건부 기대가격 벡터 계산
result.r_PP_con = result.r_PP+PP_r.A2*(PP_r.tilde_Z-PP_r.Z_bar) ;

% 비조건부 기대가격 벡터의 (1,1)원소를 자산 1에 대한 비조건부 기대가격, (1,2)의 원소를 자산 2에 대한
비조건부 기대가격으로 뽑아내어 각각 저장
result.r_p11 = result.r_PP(1,1) ;
result.r_p22 = result.r_PP(2,1) ;
result.r_p1(t,1) = result.r_p11 ;
result.r_p2(t,1) = result.r_p22 ;

% 조건부 기대가격 벡터의 (1,1)원소를 자산 1에 대한 조건부 기대가격, (1,2)의 원소를 자산 2에 대한
비조건부 기대가격으로 뽑아내어 각각 저장
result.r_p11_con = result.r_PP_con(1,1) ;
result.r_p22_con = result.r_PP_con(2,1) ;
result.r_p1_con(t,1) = result.r_p11_con ;
result.r_p2_con(t,1) = result.r_p22_con ;

%% 주의 재할당에 따른 자산 1의 posterior 변동성 변화 계산
% 가격과 시그널을 조건부로 하여 자산 1의 수익의 변동성(posterior) 계산
result.con_var_r2 = inv(inv(PP_r.Sigma_R) + PP_r.C'*(PP_r.Sigma^(-1))*PP_r.C + PP_r.Pi*inv(PP_r.
Sigma_Z)*PP_r.Pi) ;

% 자산 1의 조건부 공분산(posterior) 행렬의 (1,1)의 원소를 뽑아내어 저장
result.var_r_r11 = result.con_var_r2(1,1) ;
result.var_r_r1(t) = result.var_r_r11 ;
end

%% 자산 2 순공급의 변동성 변화에 따라 변하는 c2*에 대하여 비조건부,조건부 기대가격을 계산
for tt=1:G.n_grid
% 파라미터 행렬 지정
PP_z.tilde_Z = [normpdf(P.z1_bar,P.sigma_z1^(2)) ; normpdf(P.z2_bar,G.sigma_z2(tt)^(2))] ;
PP_z.Sigma = (P.sigma_r1^(2) + (result.c_2_star_z2(tt)^(2)*(P.sigma_r2^(2)))/(exp(2*P.kappa_cap)
-1) ; % 시그널의 변동성
PP_z.R_bar = [P.r1_bar ; P.r2_bar] ; % 자산 수익의 평균 벡터
PP_z.Z_bar = [P.z1_bar ; P.z2_bar] ; % 자산 순공급의 평균 벡터
PP_z.Sigma_R = [P.sigma_r1^(2), 0 ; 0, P.sigma_r2^(2)] ; % 두 자산 수익의 공분산 행렬
PP_z.Sigma_Z = [P.sigma_z1^(2), 0 ; 0, G.sigma_z2(tt)^(2)] ; % 두 자산 순공급의 공분산 행렬
PP_z.C = [1, result.c_2_star_z2(tt)] ; % 신호에 대하여 투자자가 할당하는 가중치 벡터
PP_z.Pi = P.rho*(PP_z.Sigma)^(-1)*PP_z.C'*PP_z.C ; % p.20의 파이 행렬
PP_z.A2 = (1/P.Rf)*((P.rho*inv(PP_z.Sigma_R) + P.rho*PP_z.Pi*inv(PP_z.Sigma_Z)*PP_z.Pi + PP_z.Pi)^
(-1))*(eye(2) + P.rho*PP_z.Pi*inv(PP_z.Sigma_Z)) ; % Calculating A1

% 비조건부 기대가격 벡터 계산
result.z_PP = (1/P.Rf)*(PP_z.R_bar-(P.rho*inv(PP_z.Sigma_R)+P.rho*PP_z.Pi*inv(PP_z.Sigma_Z)*PP_z.
Pi+PP_z.Pi)^(-1)*PP_z.Z_bar) ;

% 조건부 기대가격 벡터 계산
result.z_PP_con = result.z_PP+PP_z.A2*(PP_z.tilde_Z-PP_z.Z_bar) ;

% 비조건부 기대가격 벡터의 (1,1)원소를 자산 1에 대한 기대가격, (1,2)의 원소를 자산 2에 대한

```

기대가격으로 뽑아내어 각각 저장

```
result.z_p11 = result.z_PP(1,1) ;
result.z_p22 = result.z_PP(2,1) ;
result.z_p1(tt,1) = result.z_p11 ;
result.z_p2(tt,1) = result.z_p22 ;
```

% 조건부 기대가격 벡터의 (1,1)원소를 자산 1에 대한 조건부 기대가격, (1,2)의 원소를 자산 2에 대한
비조건부 기대가격으로 뽑아내어 각각 저장

```
result.z_p11_con = result.z_PP_con(1,1) ;
result.z_p22_con = result.z_PP_con(2,1) ;
result.z_p1_con(tt,1) = result.z_p11_con ;
result.z_p2_con(tt,1) = result.z_p22_con ;
```

%% 주의 재할당에 따른 자산 1의 posterior 변동성 변화 계산

% 가격과 시그널을 조건부로 하여 자산 1의 수익의 변동성(posterior) 계산

```
result.con_var_z2 = inv(inv(PP_z.Sigma_R)+PP_z.C'*PP_z.Sigma^(-1)+PP_z.C + PP_z.Pi*inv(PP_z.  
Sigma_Z)*PP_z.Pi) ;
```

% 자산 1의 조건부 공분산(posterior) 행렬의 (1,1)의 원소를 뽑아내어 저장

```
result.var_z_r11 = result.con_var_z2(1,1) ;
result.var_z_r1(tt) = result.var_z_r11 ;
```

end

%% 그래프로 결과 구현

% 그림 1 : 자산 2 수익의 변동성 증가에 따른 투자자의 자산 2에 대한 최적 가중치 c_2^*

```
figure ;
plot(G.sigma_r2,result.c_2_star_r2,'b','LineWidth',2.0)
xlabel( '\Wbf{\sigma_{r2}}')
ylabel( '\Wbf{c_2^{*}}')
legend('c_2^{*}')
title( '\sigma_{r_2}^2 변화에 따른 c_2^{*}의 변화','FontSize',15)
grid on
```

% 그림 2 : 자산 2 수익의 변동성 증가에 따른 투자자의 자산 1에 대한 최적 상대 가중치 c_1^*

```
figure(2) ;
plot(G.sigma_r2,result.c_1_star_r2,'r','LineWidth',2.0)
xlabel( '\Wbf{\sigma_{r2}}')
ylabel( '\Wbf{c_1^{*}}')
legend('c_1^{*}')
title( '\sigma_{r_2}^2 변화에 따른 c_1^{*}의 변화','FontSize',15)
grid on
```

% 그림 3 : 자산 2 순공급의 변동성 증가에 따른 투자자의 자산 2에 대한 최적 가중치 c_2^*

```
figure(3) ;
plot(G.sigma_z2,result.c_2_star_z2,'b','LineWidth',2.0)
xlabel( '\Wbf{\sigma_{z2}}')
ylabel( '\Wbf{c_2^{*}}')
legend('c_2^{*}')
title( '\sigma_{z_2}^2 변화에 따른 c_2^{*}의 변화','FontSize',15)
grid on
```



```

% 그림 4 : 자산 2 순공급의 변동성 증가에 따른 투자자의 자산 1에 대한 최적 상대 가중치  $c_2^*$ 
figure(4) ;
plot(G.sigma_z2,result.c_1_star_z2,'r','LineWidth',2.0)
xlabel( '\bf{\sigma}_{z2}')
ylabel( '\bf{c_1^{*}}')
legend('c_1^{*}')
title( '\sigma_{z_2}^2 변화에 따른 c_1^{*}의 변화', 'FontSize',15)
grid on

% 그림 5 : 자산 2 수익의 변동성 증가에 따른 투자자의 자산 2에 대한 최적 상대 가중치  $c_2^*$ 의 증가가
%       야기하는 자산 2의 비조건부 기대가격
figure(5) ;
plot(G.sigma_r2,result.r_p2,'b','LineWidth',2.0)
xlabel( '\bf{\sigma}_{r2}')
ylabel( '\bf{p_{1}}')
legend('p_{1}')
title( '\sigma_{r_2}^2가 야기하는 (c_2^{*}) 변화에 따른 자산 2의 비조건부 가격(p_{2})↙
변화', 'FontSize',10)
grid on

% 그림 6 : 자산 2 수익의 변동성 증가에 따른 투자자의 자산 2에 대한 최적 상대 가중치  $c_2^*$ 의 증가가
%       야기하는 자산 1의 비조건부 기대가격
figure(6) ;
plot(G.sigma_r2,result.r_p1,'r','LineWidth',2.0)
xlabel( '\bf{\sigma}_{r2}')
ylabel( '\bf{p_{1}}')
legend('p_{1}')
title( '\sigma_{r_2}^2가 야기하는 (c_2^{*}) 변화에 따른 자산 1의 비조건부 가격(p_{1})↙
변화', 'FontSize',10)
grid on

% 그림 7 : 자산 2 순공급 변동성 증가에 따른 투자자의 자산 2에 대한 최적 상대 가중치  $c_2^*$ 의 증가가
%       야기하는 자산 2의 비조건부 기대가격
figure(7) ;
plot(G.sigma_z2,result.z_p2,'b','LineWidth',2.0)
xlabel( '\bf{\sigma}_{z2}')
ylabel( '\bf{p_{2}}')
legend('p_{2}')
title( '\sigma_{z_2}^2가 야기하는 (c_2^{*}) 변화에 따른 자산 2의 비조건부 가격(p_{2})↙
변화', 'FontSize',10)
grid on

% 그림 8 : 자산 2 순공급 변동성 증가에 따른 투자자의 자산 2에 대한 최적 상대 가중치  $c_2^*$ 의 증가가
%       야기하는 자산 1의 비조건부 기대가격
figure(8) ;
plot(G.sigma_z2,result.z_p1,'r','LineWidth',2.0)
xlabel( '\bf{\sigma}_{z2}')
ylabel( '\bf{p_{1}}')
legend('p_{1}')

```

```

title( 'Wsigma_{z_2}^{*2}가 야기하는 (c_{2}^{*}) 변화에 따른 자산 1의 비조건부 가격(p_{1})'✓
'변화','FontSize',10)
grid on

% 그림 9 : 자산 2 수익의 변동성 증가에 따른 투자자의 자산 2에 대한 최적 상대 가중치 c2*의 증가가
% 야기하는 자산 2의 조건부 기대가격(주어진 순공급에 대하여)
figure(9) ;
plot(G.sigma_r2,result.r_p2_con,'b','LineWidth',2.0)
xlabel( 'Wb{Wsiga_{r2}}')
ylabel( 'Wb{p_{1}}')
legend('p_{2}(given Z)')
title( 'Wsiga_{r_2}^{*2}가 야기하는 (c_{2}^{*}) 변화에 따른 순공급 조건부 자산 2 가격(p_{2})'의✓
'변화','FontSize',10)
grid on

% 그림 10 : 자산 2 수익의 변동성 증가에 따른 투자자의 자산 2에 대한 최적 상대 가중치 c2*의 증가가
% 야기하는 자산 1의 조건부 기대가격(주어진 순공급에 대하여)
figure(10) ;
plot(G.sigma_r2,result.r_p1_con,'r','LineWidth',2.0)
xlabel( 'Wb{Wsiga_{r2}}')
ylabel( 'Wb{p_{1}}')
legend('p_{1}(given Z)')
title( 'Wsiga_{r_2}^{*2}가 야기하는 (c_{2}^{*}) 변화에 따른 순공급 조건부 자산 1 가격(p_{1})'의✓
'변화','FontSize',10)
grid on

% 그림 11 : 자산 2 순공급 변동성 증가에 따른 투자자의 자산 2에 대한 최적 상대 가중치 c2*의 증가가
% 야기하는 자산 2의 조건부 기대가격(주어진 순공급에 대하여)
figure(11);
plot(G.sigma_z2,result.z_p2_con,'b','LineWidth',2.0)
xlabel( 'Wb{Wsiga_{z2}}')
ylabel( 'Wb{p_{2}}')
legend('p_{2}(given Z)')
title( 'Wsiga_{z_2}^{*2}가 야기하는 (c_{2}^{*}) 변화에 따른 순공급 조건부 자산 2 가격(p_{2})'의✓
'변화','FontSize',10)
grid on

% 그림 12 : 자산 2 순공급 변동성 증가에 따른 투자자의 자산 2에 대한 최적 상대 가중치 c2*의 증가가
% 야기하는 자산 1의 조건부 기대가격(주어진 순공급에 대하여)
figure(12) ;
plot(G.sigma_z2,result.z_p1_con,'r','LineWidth',2.0)
xlabel( 'Wb{Wsiga_{z2}}')
ylabel( 'Wb{p_{1}}')
legend('p_{1}(given Z)')
title( 'Wsiga_{z_2}^{*2}가 야기하는 (c_{2}^{*}) 변화에 따른 순공급 조건부 자산 1 가격(p_{1})'의✓
'변화','FontSize',10)
grid on

% 그림 13 : 간접효과2(자산 2 수익의 변동성(prior) 증가에 따른 주의 재할당)에
% 따른 자산 1 수익의 변동성(posterior)증가 확인

```

```

figure(13) ;
plot(G.sigma_r2,result.var_r1,'b','LineWidth',2.0)
xlabel( '\bf{\sigma_{r2}}')
ylabel( '\bf{p_{1}}')
legend('Var(r_{1}|Y_{i},P)')
title( '간접효과에 따른 투자자의 주의 재할당에 따라 증가하는 자산 1의 향후 분산(posterior ↙
variance)','FontSize',10)
grid on

% 그림 14 : 간접효과2(자산 2 순공급의 변동성(prior) 증가에 따른 주의 재할당)에
%          따른 자산 1 수익의 변동성(posterior)증가 확인
figure(14) ;
plot(G.sigma_z2,result.var_zr1,'r','LineWidth',2.0)
xlabel( '\bf{\sigma_{z2}}')
ylabel( '\bf{p_{1}}')
legend('Var(r_{1}|Y_{i},P)')
title( '간접효과에 따른 투자자의 주의 재할당에 따라 증가하는 자산 1의 향후 분산(posterior ↙
variance)','FontSize',10)
grid on

% 그림 15 : 자산 2의 수익과 순공급 grid 위에서 구한 최적 가중치 c2
figure(15)
surf(G.sigma_r2,G.sigma_z2,result.c_2_pre)
xlabel( '\bf{\sigma_{r2}}')
ylabel( '\bf{\sigma_{z2}}')
title( '투자자가 자산 2 수익에 관한 신호에 할당하는 최적 가중치(c_{2}^{*})','FontSize',15)
grid on

```

참고 문헌

- [1] Nathaniel Frank, Brenda Gonzalez-Hermosillo, and Heiko Hesse, Transmission of Liquidity Shocks : Evidence from the 2007 Subprime Crisis, International Monetary Fund Working Paper, 2008
- [2] Marthias Drehmann and Kleopatra Nikolaou, Funding Liquidity Risk Definition and Measurement, European Central Bank Working Paper Series, 2009
- [3] Giorgio Valente, Market Liquidity And Funding Liquidity : An Empirical Investigation, Hong kong Institute for Monetary Research, 2010
- [4] Brunnermeir and Pedersen, Market Liquidity and Funding liquidity, Review of Financial Studies, 2008
- [5] Robert Engle, Dynamic Conditional Correlation - A Simple Class of Multivariate GARCH Models, Forthcoming Journal of Business and Economic Statistics, 2002
- [6] A.A. Kòtze, Stock Price Volatility : A Primer, Financial Chaos Theory, 2005
- [7] Walter Enders, 3rd Applied Econometric Time Series, John Wiley and Sons (2010), 297-325
- [8] Jordi Mondria, Portfolio Choice, Attention Allocation, and Price Co-movement, University of Toronto, 2010
- [9] Richard G. Anderson and Chales S. Gscon, The Commercial Paper Market, the Fed, and the 2007-2009 Financial Crisis, Federal Reserve Bank of St.Louis, 2009

- [10] Daniel L. Thornton, What the LIBOR-OIS spread says, Federal Reserve Bank of St.Louis, 2009
- [11] Robert L. McDonald, Derivatives Markets, 2nd edition, PEARSON, 2006
- [12] Anthony Santomero, David Bebbel, Financial Markets, Instruments and Institutions 2nd edition, McGraw-Hill, 2001
- [13] Scott D. Stewart, Christopher D. Piros, Jeffrey C. Heisler, Running Money: Professional Portfolio Management, McGraw-Hill, 2011
- [14] Anat R.Admati, A Noisy Rational Expectations Equilibrium for Multi-Asset Securities Markets, Econometrica, Vol.53,No.3, 1985
- [15] Bruce E.Hansen, Econometrics, University of Wisconsin, 2012

Abstract

Jeonghun Choi
School of Economics
The Graduate School
Seoul National University

This paper explains the model in Mondria (2010) which deals with the portfolio choice of rationally inattentive agents as a mechanism of the transmission of volatility shocks between different financial markets during the recent financial crisis. First, I calculated numerical solutions of the model and represented the result. And then, tried to estimate rate of return of assets. By doing so I aimed at assessing performances and results of the model.

Keywords : financial crisis, transmission of volatility shocks, rational inattention

Student Number : 2011-20196